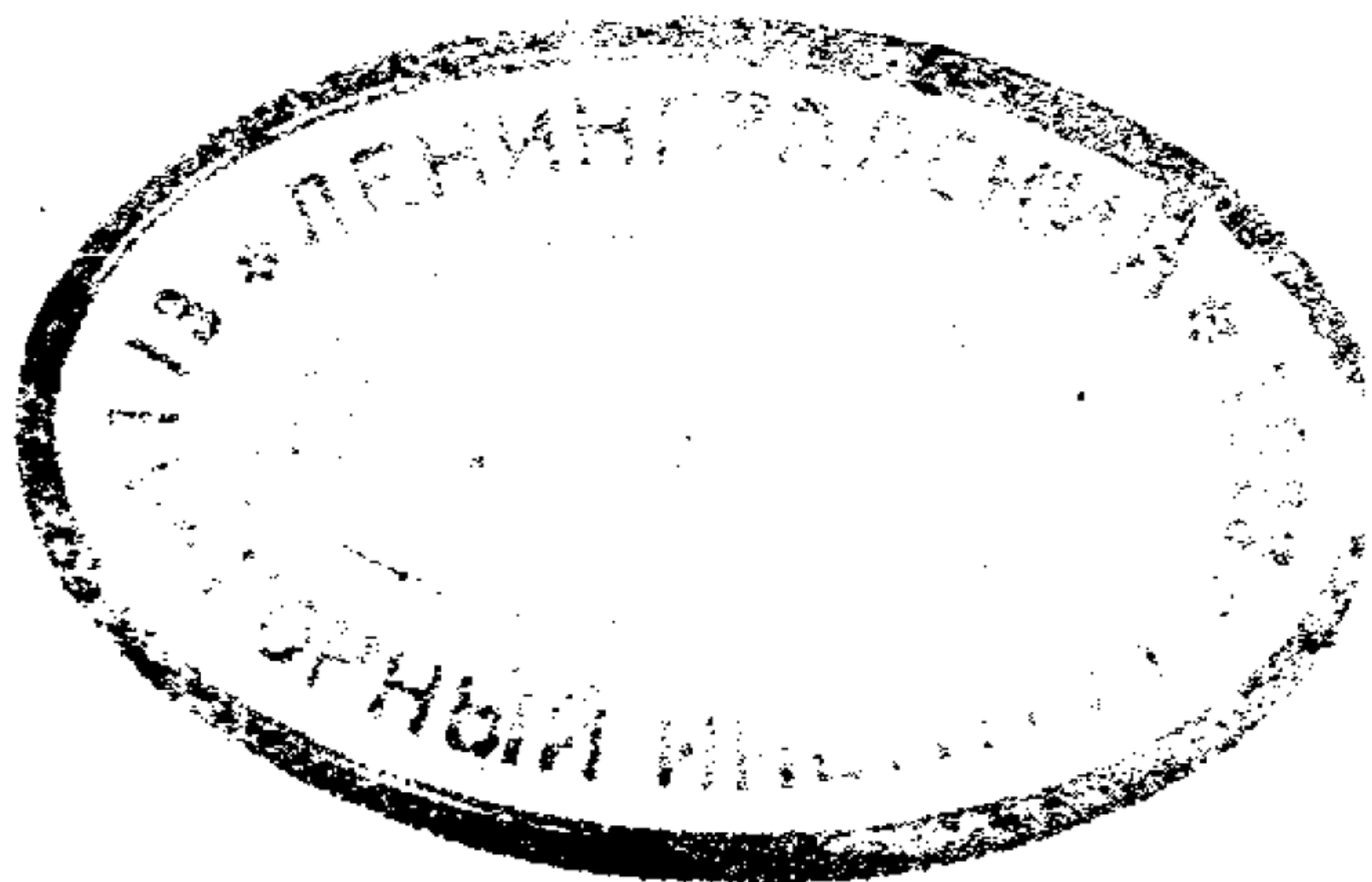




7. Замѣтка объ остаточномъ членѣ ряда Тэйлора.

И. П. Долбни.

(Доложено 1 мая 1907 г.).

§ 1. Желая принести пользу начинающимъ, я долженъ войти въ такія предварительныя подробности, которыя были бы излишни въ специальномъ математическомъ журналѣ.

Даны двѣ функціи

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x),$$

конечныя и непрерывныя въ промежуткѣ отъ x до $x+h$; $h > 0$, $h = \Delta x$. Имѣемъ

$$dy = \varphi'(x) dx; \quad dz = \psi'(x) dx; \quad \text{значитъ}$$

$$(1) \quad \frac{dy}{dz} = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Съ другой стороны

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}.$$

По теоремѣ Лагранжа, рассматривая y какъ функцію z , можемъ написать

$$\frac{\Delta y}{\Delta z} = \left(\frac{dy}{dz} \right) z + \delta \Delta z,$$

гдѣ

$$0 < \delta < 1.$$

Но значенію $z + \delta \Delta z$ соотвѣтствуетъ значеніе x , опредѣляемое формулой:

$$x + \theta \Delta x, \\ 0 < \theta < 1.$$

Поэтому, пользуясь (1), имѣемъ

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(x + \theta \Delta x)}{\psi'(x + \theta \Delta x)}.$$

§ 2. Даны двѣ функціи

$$F(x), \quad f(x),$$

конечныя и непрерывныя, равно какъ и n ихъ послѣдовательныхъ производныхъ, въ промежуткѣ отъ x_0 до $x_0 + h$.

Пусть при $x = x_0$ будетъ:

$$F(x_0) = F'(x_0) = \dots = F^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Легко доказать, что, при этихъ условіяхъ,

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}.$$

Въ самомъ дѣлѣ

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x) - F(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{f'(x_0 + \theta h)}.$$

Если $\theta h = h_1 < h$, то

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F'(x_0 + h_1) - F'(x_0)}{f'(x_0 + h_1) - f'(x_0)} = \frac{F''(x_0 + \theta_1 h_1)}{f''(x_0 + \theta_1 h_1)}.$$

Называя

$$\theta_1 h_1 = h_2 < h_1 < h,$$

имѣемъ

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F''(x_0 + h_2) - F''(x_0)}{f''(x_0 + h_2) - f''(x_0)} = \frac{F'''(x_0 + \theta_2 h_2)}{f'''(x_0 + \theta_2 h_2)}.$$

Ясно, что такимъ образомъ дойдемъ до равенства

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F^{(n)}(x_0 + \theta_{n-1} h_{n-1})}{f^{(n)}(x_0 + \theta_{n-1} h_{n-1})}.$$

Называя

$$\theta_{n-1} h_{n-1} = h_n < h_{n-1} < h_{n-2} < \dots < h, \\ h_n = \delta h,$$

имѣемъ

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x_0 + h)}{f(x_0 + h)} = \frac{F^{(n)}(x_0 + \delta h)}{f^{(n)}(x_0 + \delta h)}, \\ 0 < \delta < 1.$$

§ 3. Имѣемъ

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x + \theta h),$$

или въ болѣе неопредѣленной формѣ

$$f(x+h) = f(x) + h \varphi(h)$$

Дифференцируя это равенство по h , полагая x независимым от h , имеемъ

$$f'(x+h) = \varphi(h) + h\xi(h),$$

гдѣ знакомъ ξ обозначена функція, которой въ данномъ ближе намъ нѣтъ надобности знать.

Полагая

$$h=0,$$

имеемъ

$$\varphi(0) = f'(x).$$

А такъ какъ

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi_1(h),$$

то

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + h^2 \varphi_1(h)$$

Дифференцируя это равенство по h два раза, получимъ

$$f''(x+h) = 1.2. \varphi_1(h) + h\xi_1(h);$$

отсюда

$$\varphi_1(0) = \frac{1}{1.2} f''(x).$$

А такъ какъ

$$\varphi_1(h) = \varphi_1(0) + h\varphi_2(h),$$

то

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + h^3 \varphi_2(h).$$

Ясно, что такимъ путемъ дойдемъ до равенства

$$(2) \quad f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + h^n \psi(h),$$

гдѣ $\psi(h)$ нужно опредѣлить.

Изъ (2) имеемъ

$$(3) \quad \psi(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - h f'(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x)}{h^n}$$

Такъ какъ числитель и знаменатель правой части (3) обращается въ нуль при $h=0$ и, кромѣ того, при $h=0$ обращаются въ нуль все производ-

ныя числителя и все производныя знаменателя до $(n-1)$ -го порядка включительно, то (§ 2)

$$(4) \quad \psi(h) = \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{1.2 \dots n}.$$

Это форма остаточнаго члена, найденная Лагранжемъ.

§ 4. Уравненіе (3) напишется такъ

$$(5) \quad h^{n-p} \psi(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - \frac{h^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x)}{h^p}.$$

Числитель и знаменатель (5) обращаются въ нуль при $h=0$ вмѣстѣ со всеми своими производными до $(p-1)$ -го порядка, а потому по § 2 можно написать

$$h^{n-p} \psi(h) = \frac{f^{(p)}(x+h_1) - f^{(p)}(x) - \dots - \frac{h_1^{n-p-1}}{1.2.3 \dots (n-p-1)} f^{(n-1)}(x)}{1.2.3 \dots p},$$

$$h_1 = \theta h.$$

Но

$$f^{(p)}(x+h_1) - f^{(p)}(x) - \dots - \frac{h_1^{n-p-1}}{1.2 \dots (n-p-1)} \frac{d^{n-p-1}}{dx^{n-p-1}} f^{(p)}(x) = \frac{h_1^{n-p} f^{(n)}(x+\delta h_1)}{1.2 \dots n-p}.$$

Слѣдовательно

$$h^{n-p} \psi(h) = \frac{\theta^{n-p} h^{n-p} f^{(n)}(x+\delta \theta h)}{1.2 \dots p. 1.2 \dots (n-p)},$$

$$\psi(h) = \frac{\theta^{n-p} f^{(n)}(x+\delta \theta h)}{1.2 \dots p. 1.2 \dots (n-p)}.$$

Поэтому

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \dots + \frac{\theta^{n-p} h^n f^{(n)}(x+\delta \theta h)}{1.2 \dots p. 1.2 \dots (n-p)},$$

$$0 < \delta < 1.$$

Получили, такимъ образомъ, новую форму остаточнаго члена.



14. Объ одномъ преобразованіи эллиптическихъ интеграловъ.

И. П. Долбни.

(Доложено 10 сентября 1907 г.).

§ 1. Разсмотримъ эллиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = u.$$

Положимъ

$$\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4} = -x^2 - \alpha + \lambda z \quad (1).$$

При

$$x = \infty$$

имѣемъ

$$\sqrt{1 + \frac{6a_2}{x^2} + \frac{4a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4}} + 1 + \frac{\alpha}{x^2} = \frac{\lambda z}{x^2},$$

$$\lim \frac{\lambda z}{x^2} = 2.$$

Полагая

$$\lim \frac{z}{x^2} = 1,$$

имѣемъ

$$\lambda = 2.$$

Такъ какъ преобладающій членъ въ разложеніи $x = \infty$ по степенямъ u есть u^{-1} , то преобладающій членъ въ разложеніи $z = \infty$ по степенямъ u долженъ быть u^{-2} . Отсюда слѣдуетъ, что если преобразование (1) возможно, при условіи, что z есть мономдромная функція u , то мы должны имѣть

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4}} = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2z - g_3}} \quad (2),$$

$$z = \rho(u, g_2, g_3).$$

Положимъ

$$x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Полагая, что при

$$x = x_1$$

будетъ

$$z = z_1 = \rho(w),$$

изъ уравненія (1) имѣемъ

$$(x-x_1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \dots = -x_1^2 - \alpha + 2\rho(w) + 2(u-w)\rho'(w) + \dots$$

Горн. Зап., вып. III.

Отсюда видно, что

$$2\rho(w) = x_1^2 + \alpha \quad (3)$$

Кромѣ того изъ уравненія

$$\int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}} = u$$

слѣдуетъ, что въ смежности съ $x-x_1=0$ имѣетъ мѣсто разложеніе $(x-x_1)$ по степенямъ u съ преобладающимъ членомъ

$$\left[\frac{1}{2} \sqrt{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \right]^2 (u-w)^2;$$

поэтому

$$\frac{2\rho'(w)}{\sqrt{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)};$$

слѣдовательно

$$4\rho'(w) = (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4) = 1$$

$$4x_1^3 + 12a_2x_1 + 4a_3,$$

или

$$4\rho^3(w) - g_2\rho(w) - g_3 = (x_1^3 + 3a_2x_1 + a_3)^2,$$

или

$$x_1^6 + (12a_2 - 3\alpha)x_1^4 - 4a_3x_1^3 + (18a_2^2 - 3\alpha^2 - g_2)x_1^2 + 12a_2a_3x_1 + 2a_3^2 - \alpha^3 - g_2\alpha - 2g_3 = 0.$$

Такъ какъ это равенство справедливо для

$$x = x_1, x_2, x_3, x_4,$$

то, раздѣляя лѣвую часть на

$$x_1^4 + 6a_2x_1^2 + 4a_3x_1 + a_4$$

и приравнявъ нулю коэффициенты остатка отъ этого дѣленія, найдемъ

$$\alpha = a_2,$$

$$g_2 = 3a_2^2 + a_4,$$

$$g_3 = a_2a_4 - a_2^3 - a_3^2.$$

§ 2. Разсмотримъ теперь тѣ значенія аргумента u , для которыхъ

$$\rho'(u) = 0,$$

т. е.

$$\rho(u) = e_1, \rho(u) = e_2, \rho'(u) = e_3$$

$$u = \omega, u = \omega', u = \omega + \omega'.$$

Разлагая обѣ части уравненія

$$\sqrt{x^4 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4} + x^2 = 2\rho(u) - a_2$$

въ ряды въ смежности съ

$$u = \omega,$$

гдѣ ω одно изъ трехъ значеній

$$\omega, \omega', \omega + \omega',$$

получимъ

$$\sqrt{f(\xi)} + \xi^2 + \left[\frac{2(\xi^3 + 3a_2\xi + a_3)}{\sqrt{f(\xi)}} + 2\xi \right] (x - \xi) + \dots$$

$$= 2e - a_2 + \frac{1}{2}(u - \omega)^2 \rho''(\omega) + \dots$$

Такъ какъ

$$f(\xi) = \xi^4 + 6a_2\xi^2 + 4a_3\xi + a_4,$$

то мы должны имѣть

$$(5) \quad \xi^3 + 3a_2\xi + a_3 = -\xi \sqrt{f(\xi)},$$

$$\sqrt{f(\xi)} = -\xi^2 + 2e - a_2,$$

т. е.

$$a_3 + 2(a_2 + e)\xi = 0.$$

Перемножая уравненія

$$a_3 + 2(a_2 + e_1)\xi = 0,$$

$$a_3 + 2(a_2 + e_2)\xi = 0,$$

$$a_3 + 2(a_2 + e_3)\xi = 0,$$

получимъ

$$(8a_2^3 - 2a_2g_2 + 2g_3)\xi^3 + (12a_2^2 - g_2)a_3\xi^2 + 6a_2a_3^2\xi + a_3^3 = 0 \quad (6)$$

Уравненіе (5) даетъ

$$a_3^2 + 6a_2a_3\xi + (9a_2^2 - a_4)\xi^2 - 2a_3\xi^3 = 0.$$

Уравненія (6) и (7) должны быть тождественны поэтому

$$g_2 = 3a_2^2 + a_4,$$

$$g_3 = -a_3^2 - a_2^3 + a_2a_4.$$

Получили тѣ же, что и выше, результаты.

§ 3. Изъ уравненія (3) имѣемъ

$$2 \sum \rho(w) = 4a_2 + \sum x_1^2 = -8a_2,$$

$$\sum \rho(w) = -4a_2,$$

$$\sum \rho^2(w) = -13a_2^2 - a_4,$$

$$\sum \rho^3(w) = 6a_3^2 - 31a_2^3 + 3a_2a_4,$$

$$\sum \rho^4(w) = -24a_2a_3^2 + 78a_2^4 - \frac{15}{2}a_2^2a_4 + \frac{1}{2}a_4^2.$$

Отсюда видно, что $\rho(w)$ опредѣляется уравненіемъ 4-й степени

$$\rho^4(w) + 4a_2\rho^3(w) + \frac{1}{2}g_2\rho^2(w) + (2g_3 - a_2g_2)\rho(w) + \left(\frac{1}{16}g_2^2 - a_2g_3\right) = 0.$$

Откуда

$$-a_2 = \frac{\rho^4(w) + \frac{1}{2}g_2\rho^2(w) + 2g_3\rho(w) + \frac{1}{16}g_2^2}{4\rho^3(w) - g_2\rho(w) - g_3}.$$

Отсюда видно, что

$$-a_2 = \rho(2w),$$

$$\rho'^2(2w) = a_3^2$$



24. Новое доказательство основной теоремы Алгебры.

И. П. Долбни.

(Доложено 12 мая 1908 г.).

§ 1. Пусть точка x представляет компл. переменное

$$x = \rho (\cos \omega + i \sin \omega).$$

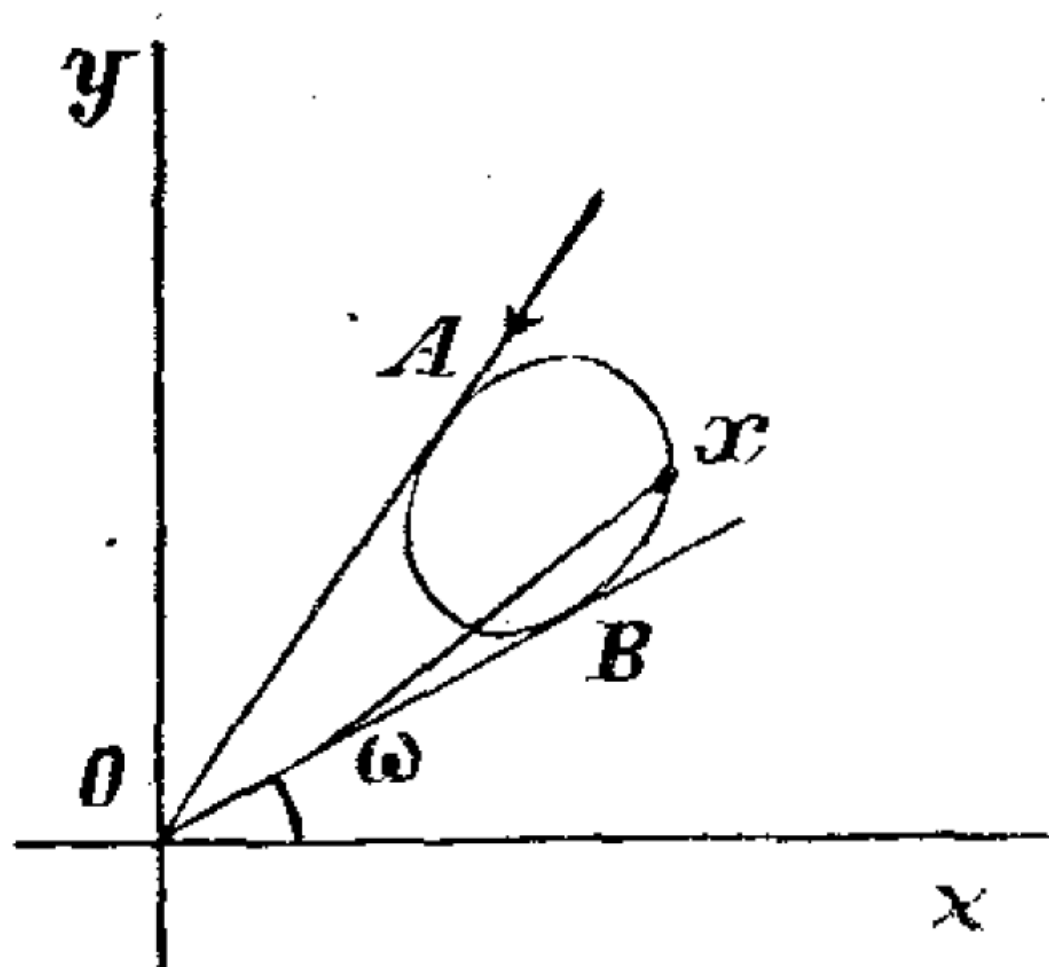
Будем изменять x по сомкнутой кривой в положительном направлении. Аргумент ω возрастает от точки x до точки A , в которой модуль AO есть касательная к кривой. Аргумент убывает от точки A до точки B , где радиус вектор OB касателен к кривой. После этого аргумент возрастает и в точке x приобретает первоначальную величину. Если теперь изменять x по кривой, внутри которой начало координат, то аргумент ω возрастает непрерывно, и, по совершении полного оборота по кривой, аргумент ω приобретает приращение 2π .

Отсюда следует, что аргумент x^m на чертеж 1 приобретет после полного оборота первоначальную величину $m\omega$, а на черт. 2 приобретет приращение

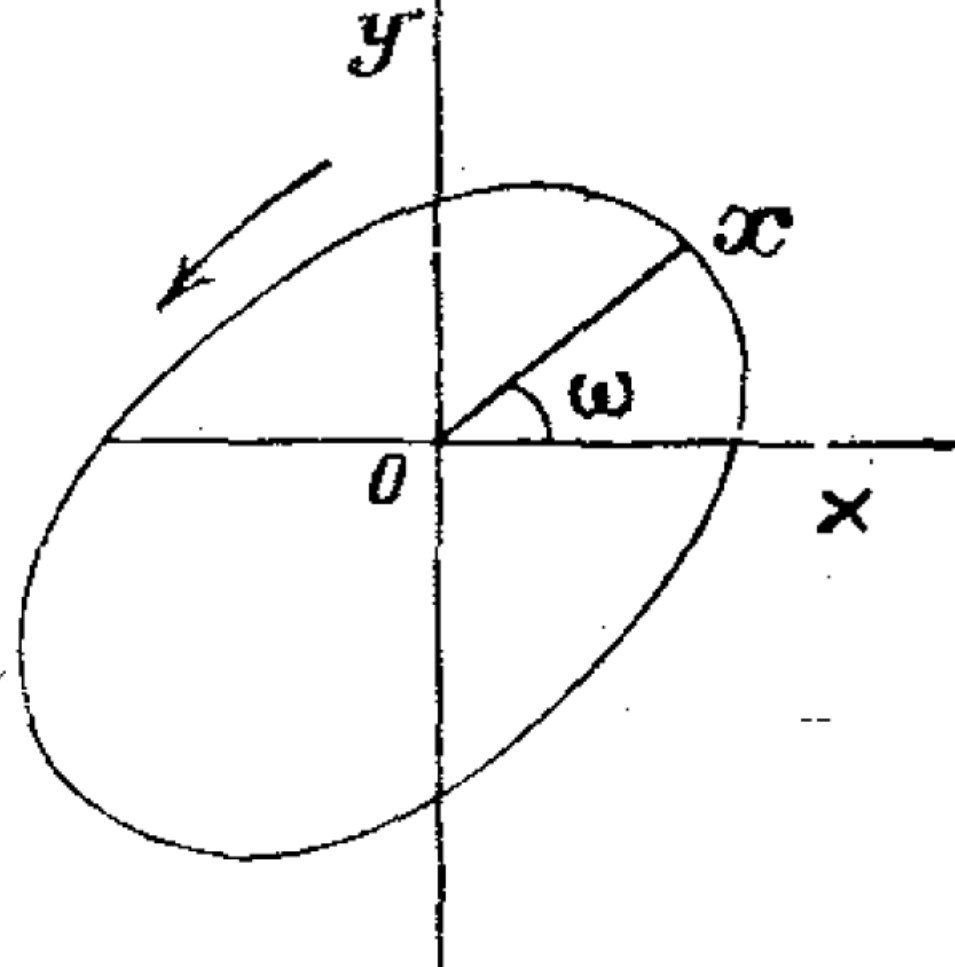
$$2m\pi.$$

И это справедливо для всякого соизмеряемого m .

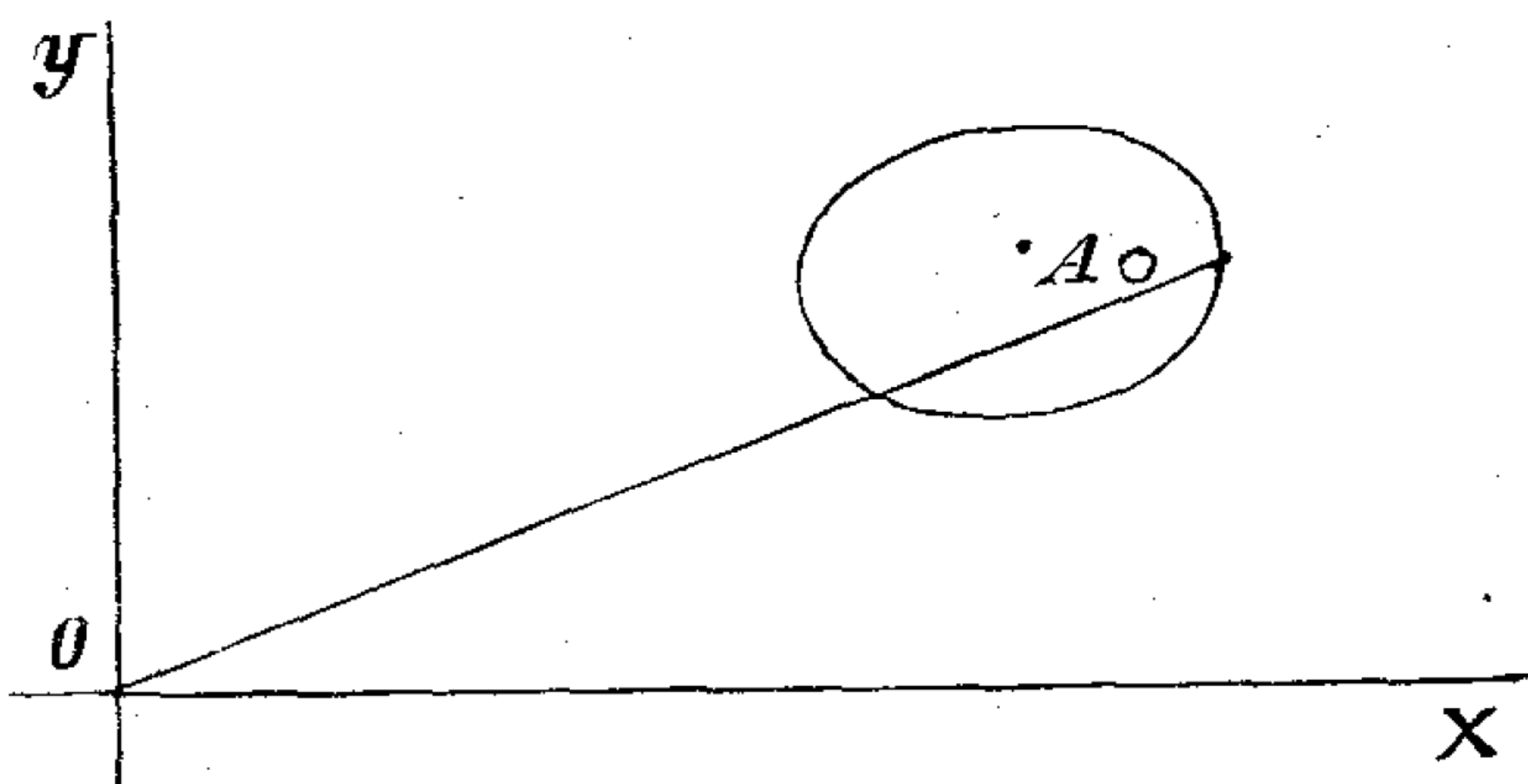
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



§ 2. Имеем целую функцию

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m.$$

Имеем

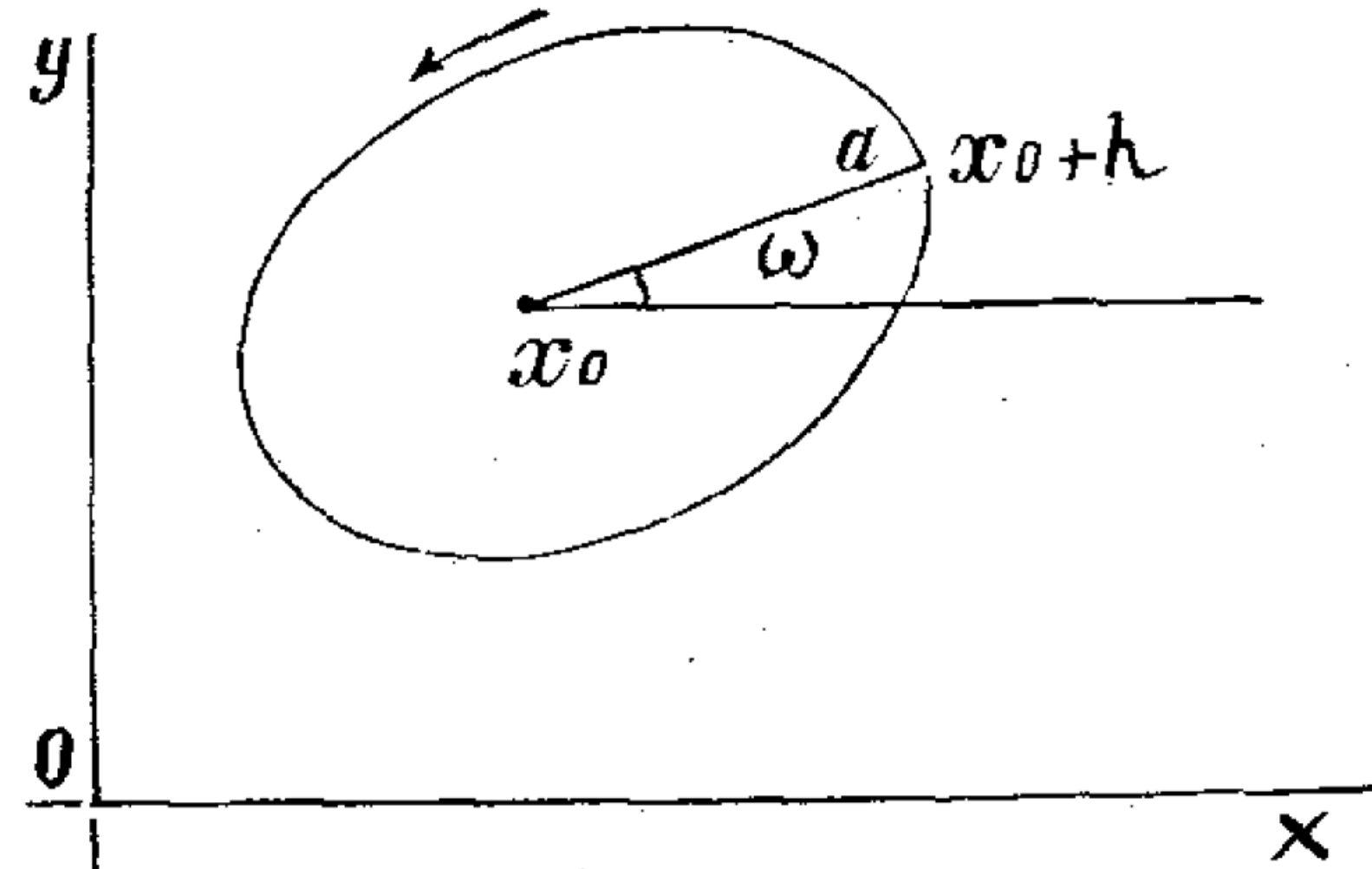
$$f(0) = a_0.$$

Комплексное переменное x изменяется по кривой черт. 2, оставаясь бесконечно малым (близким к нулю по модулю). Пусть точка A_0 (черт. 3) изображает количество a_0 . Для значений x , близких к нулю, модуль

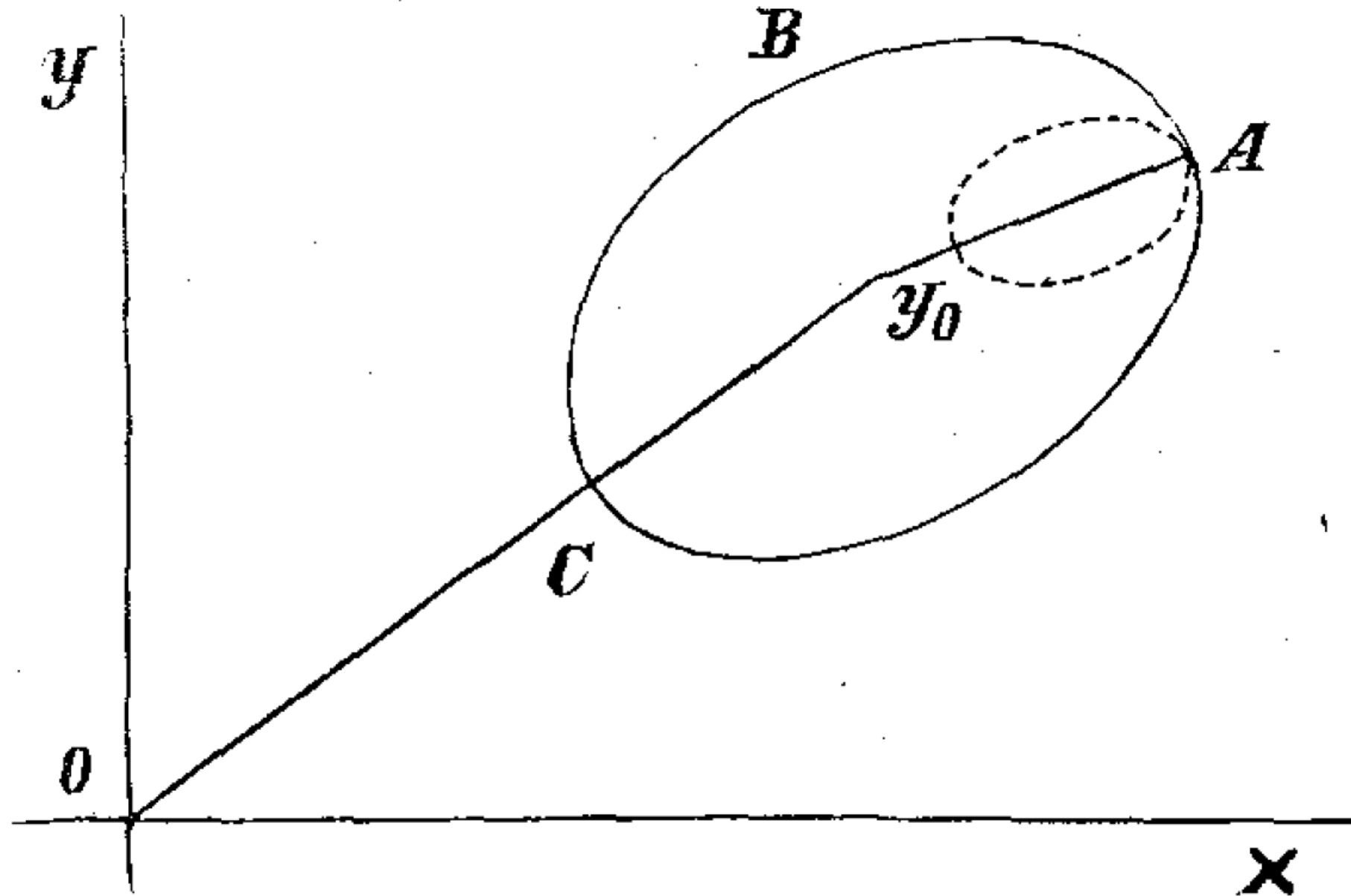
$$|f(x)|$$

близок к $|a_0|$; а потому, при изменении x по кривой (черт. 2), $f(x)$ изменяется по кривой, окружающей точку A_0 , так что модуль $f(x)$ близок к модулю a_0 . Отсюда следует, что аргумент функции $f(x)$ не получит никакого приращения, не смотря на то, что аргумент x увеличится на 2π .

Фиг. 4.



Фиг. 5.



§ 3. Положим, что комплексное переменное получает значение x_0 (черт. 4). Пусть этому зна-

ченію соотвѣтствуетъ значеніе функціи $F(x_0)$, представляемое точкой y_0 (черт. 5). Дадимъ x_0 бесконечно малое приращеніе h ; значенію $x_0 + h$ соотвѣтствуетъ точка a . Бесконечно малое h представляется модулемъ $x_0 a$ и аргументомъ ω . Если точку a будемъ перемѣщать по кривой (чер. 4) въ положительномъ направленіи, то, послѣ обхода периметра этой кривой, аргументъ компл. перем. h пріобрѣтетъ приращеніе 2π . По теоремѣ Тейлора имѣемъ

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = h F'(x_0) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} F''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} F^{(m)}(x_0)$$

Можетъ случиться, что

$$F'(x_0) = F''(x_0) = \dots = F^{(i-1)}(x_0) = 0;$$

тогда

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \frac{h^i}{1 \cdot 2 \dots i} F^{(i)}(x_0) + \dots + \frac{h^m}{1 \cdot 2 \dots m} F^{(m)}(x_0),$$

или

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = h^i \{ A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots \}$$

Когда точка a (черт. 4) совершитъ полный обходъ по кривой, окружающей точку x_0 , аргументъ h получитъ приращеніе $2\pi i$; аргументъ же полинома

$$A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots$$

не получитъ приращенія, ибо $|h|$ близокъ къ нулю.

Поэтому аргументъ приращенія

$$F(x_0 + h) - F(x_0)$$

получитъ приращеніе

$$2\pi i.$$

А это возможно лишь въ томъ случаѣ, когда точка A опишетъ кривую $ABCA$ (черт. 5), а не кривую, отмѣченную пунктиромъ. Значеніе h въ точкѣ C изображается модулемъ Cy_0 ; значеніе это назовемъ чрезъ h_1 . Точка C выразитъ значеніе

$$F(x_0 + h_1),$$

а точка y_0 —значеніе

$$F(x_0).$$

Имѣемъ

$$|F(x_0 + h_1)| < |F(x_0)|.$$

Отсюда видно, что, если

$$F(x_0) = 0,$$

можно всегда найти такое значеніе переменнаго $x_0 + h_1$, для котораго

$$|F(x_0 + h_1)| < |F(x_0)|.$$

Значитъ, измѣняя переменное x можно уменьшать модуль полинома $F(x)$ до тѣхъ поръ, пока этотъ модуль не обратится въ нуль. Положимъ, что мы нашли наконецъ

$$F(X) = 0,$$

тогда и

$$F(X) = 0,$$

тогда

$$x = X$$

называется корнемъ полинома $F(x)$. Имѣемъ теорему:

Всякій полиномъ $F(x)$ имѣетъ корень.

25. Объ одномъ классѣ приводимыхъ гиперэллиптическихъ интеграловъ.

И. П. Долбни.

(Доложено 12 мая 1908 г.).

Возьмемъ интеграль

$$(1) \int \frac{x dx}{\sqrt{x(x^2 + a_1 x + a_2)(x^2 + b_1 x + b_2)}} = u.$$

Изыщемъ подстановку

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda \rho(u, g_2, g_3)$$

наинизшей степени, при посредствѣ которой достигается приведеніе даннаго интеграла (1) къ эллиптическому. Вмѣстѣ съ тѣмъ найдемъ условія, которыми должны удовлетворять коэффициенты

$$a_1, a_2, b_1, b_2$$

для того, чтобы упомянутое приведеніе было возможно. Ясно, что степень $f(x)$ должна быть на единицу выше степени $\varphi(x)$. При $x = \infty$ имѣемъ для x разложеніе съ преобладающимъ членомъ

$$\frac{x^2}{4u}$$

Поэтому полагая, что коэффициенты при высшихъ членахъ полиномовъ $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны каждый единицѣ, видимъ, что

$$\lambda = 4.$$

Въ смежности съ

$$x = 0$$

имѣемъ разложеніе съ преобладающимъ членомъ

$$\frac{2}{u}$$

Отсюда слѣдуетъ, что, называя чрезъ

$$e_1, e_2, e_3$$

корни уравненія

$$\rho' u = 0,$$

мы должны имѣть

$$\frac{x^3}{\varphi(x)} = \lambda(\rho u - e_1),$$

гдѣ $\rho(x)$ есть полиномъ второй степени либо формы

$$\rho(x) = (x - p)^2,$$

гдѣ p неизвѣстное постоянное; либо формы

$$\rho(x) = x^2 + a_1 x + a_2$$

Имѣя въ виду простѣйшій случай приведенія, полагаемъ

$$\frac{x^3}{x^2 + a_1 x + a_2} = 4(\rho u - e_1).$$

Обозначая

$$4(e_1 - e_2) = \mu, \quad 4(e_1 - e_3) = \nu,$$

Изъ уравненій

$$\frac{x^3 + \mu(x^2 + a_1 x + a_2)}{x^2 + a_1 x + a_2} = 4(\rho u - e_2),$$

$$\frac{x^3 + \nu(x^2 + a_1 x + a_2)}{x^2 + a_1 x + a_2} = 4(\rho u - e_3).$$

Заключаемъ, что

$$x^3 + \mu(x^2 + a_1 x + a_2) = (x - x_1)(x - \alpha)^2,$$

$$x^3 + \nu(x^2 + a_1 x + a_2) = (x - x_2)(x - \beta)^2,$$

гдѣ

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + b_1 x + b_2.$$

Что касается до α и β , то количества эти суть корни уравненія

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{x^2 + a_1 x + a_2} \right) = 0,$$

т. е. уравненія

$$x^2 + 2a_1 x + 3a_2 = 0.$$

Поэтому имѣемъ тождество

$$[x^3 + \mu(x^2 + a_1 x + a_2)][x^3 + \nu(x^2 + a_1 x + a_2)] = (x^2 + b_1 x + b_2)[x^4 + 4a_1 x^3 + (4a_1^2 + 6a_2)x^2 + 12a_1 a_2 x + 9a_2^2].$$

Отсюда находимъ:

$$1) \mu + \nu = 4a_1 + b_1; \quad 2) \mu\nu = 6a_2 + 3a_1 b_1 + b_2.$$

Кромѣ того, послѣ небольшихъ преобразованій получимъ два соотношенія между коэффициентами:

$$1) 2a_1 a_2 - 4a_2 b_1 + a_1^2 b_1 = 0,$$

$$2) 6a_2 + 3a_1 b_1 - 8b_2 = 0.$$

Отсюда

$$b_1 = \frac{2a_1 a_2}{4a_2 - a_1^2},$$

$$b_2 = -\frac{3a_2^2}{4a_2 - a_1^2},$$

μ и ν суть корни уравненія

$$t^2 - \frac{18a_1 a_2 - 4a_1^3}{4a_2 - a_1^2} t + \frac{27a_2^2}{4a_2 - a_1^2} = 0.$$

Инварианты g_2 и g_3 выразятся рационально чрезъ a_1, a_2 , и приводимый интеграль будетъ

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x(x^2 + a_1 x + a_2)(x^2 + \frac{2a_1 a_2}{4a_2 - a_1^2} x + \frac{3a_2^2}{4a_2 - a_1^2})}}$$

§ 2. Дается интеграль

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^3 + ax^2 + 2abx + 2bca)(x + d)x}} = u,$$

Употребимъ подстановку

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{(x - \alpha)^2} = 4(\rho u - e_1);$$

$$\varphi'(x) = \frac{3x^2(x - \alpha)^2 - 2(x - \alpha)x^3}{(x - \alpha)^4};$$

уравненіе

$$\varphi'(x) = 0,$$

по освобожденіи отъ множителей, даетъ

$$x = 3\alpha.$$

Имѣемъ

$$x^3 + \mu(x - \alpha)^2 = x^3 + ax^2 + 2abx + b^2 ca,$$

$$x^3 + \nu(x - \alpha)^2 = (x - 3\alpha)^2(x + d).$$

Отсюда

$$\mu = a, \alpha = -b; \quad c = 1.$$

$$\nu = 6b + d, \quad 3b = 4d.$$

Приводимый интеграль будетъ

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(x^3 + ax^2 + 2abx + ab^2)(x + \frac{3}{4}b)x}}$$

20. Объ одномъ приложеніи теоріи исключенія къ теоріи абелевыхъ интеграловъ.

И. П. Долбни.

(Доложено 2 марта 1909 г.)

§ 1. Дается алгебраическое уравненіе

$$(1) F(x, y) = 0,$$

m степени относительно x и n степени относительно y . Требуется x и y замѣнить новыми количествами ξ и η посредствомъ уравненій

$$(2) \xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

φ и ψ раціональныя функціи. За немногими исключеніями, которыя должны быть въ каждомъ частномъ случаѣ предметомъ особаго изслѣдованія, преобразование (2) будетъ браціонально. Осуществить это преобразование посредствомъ раціональных дѣйствій можно слѣдующимъ образомъ. Изъ уравненія (1) видно, что всякому значенію y соотвѣтствуетъ m значеній

$$x_1, x_2, \dots, x_m;$$

Слѣдовательно

$$\xi_i = \varphi(x_i, y), \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^m (\xi_i)^\alpha = \sum_{i=1}^m [\varphi(x_i, y)]^\alpha,$$

гдѣ α произвольное цѣлое положительное число, выразится раціонально черезъ y . Значитъ

$$\sum_{i=1}^m (\xi_i)^\alpha = f_1(y),$$

f_1 раціональная функція

На этомъ основаніи ξ есть корень алгебраическаго уравненія

$$(3) \xi^m + A_1(y)\xi^{m-1} + A_2(y)\xi^{m-2} + \dots + A_m(y) = 0,$$

раціональныя функціи.

Этому уравненію можно дать форму полинома, расположеннаго по степенямъ y такого вида.

$$(4) y^\kappa + B_1(\xi)y^{\kappa-1} + B_2(\xi)y^{\kappa-2} + \dots = 0.$$

Подобнымъ же образомъ изъ уравненій (2) имѣемъ

$$\eta_i = \psi(x_i, y), \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

Слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{i=m} (\eta_i)^\alpha = \sum_{i=1}^{i=m} [\psi(x_i, y)]^\alpha$$

выразится рационально через y , и будетъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} (\eta_i)^\alpha = \eta(y).$$

На этомъ основаніи η есть корень алгебраическаго уравненія

$$\eta^m + C_1(y) \eta^{m-1} + C_2(y) \eta^{m-2} + \dots = 0,$$

которому можно дать форму

$$(5) \quad y^{\kappa'} + D_1(\eta) y^{\kappa'-1} + D_2(\eta) y^{\kappa'-2} + \dots = 0.$$

Будемъ искать общаго наибольшаго дѣлителя между полиномами (4) и (5) и, дойдя до остатка первой степени относительно y , приравняемъ его нулю, получимъ уравненіе, изъ котораго опредѣлимъ y какъ рациональную функцію ξ и η , т. е.

$$y = Y(\xi, \eta).$$

Изъ уравненія (1) видно, что каждому значенію x соотвѣтствуетъ n значеній y :

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Поэтому, рассуждая слово въ слово, какъ раньше, получимъ возможность опредѣлить

$$x = X(\xi, \eta),$$

гдѣ X рациональная функція.

Не входя въ дальнѣйшія подробности бираціональнаго преобразованія алгебраическихъ кривыхъ, замѣтимъ, что для нашей непосредственной цѣли имѣютъ значеніе такіа преобразованія кривой

$$F(x, y) = 0$$

по формуламъ

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

которыя не должны быть бираціональными. Такія преобразованія имѣютъ мѣсто при слѣдующихъ обстоятельствахъ. При разысканіи общаго наибольшаго дѣлителя между полиномами (4) и (5) мы дойдемъ до остатка первой степени относительно y только въ томъ случаѣ, если уравненія (4) и (5) имѣютъ одно общее рѣшеніе, что обыкновенно бываетъ. Но если подстановки (2) и уравненіе (1) обладаютъ произвольными коэффициентами, то можно подчинить ихъ условію, чтобы полиномы (4) и (5) имѣли общаго наибольшаго дѣлителя выше первой степени. Тогда преобразованіе не будетъ бираціональнымъ, и рангъ преобразованнаго къ новымъ переменнымъ уравненія

$$R(\xi, \eta) = 0$$

будетъ, вообще говоря, ниже ранга даннаго уравненія. Уравненіе

$$R(\xi, \eta) = 0$$

найдется изъ условія, что послѣдній остатокъ равенъ нулю тождественно. Въ настоящемъ изслѣдованіи мы сдѣлаемъ только одно приложеніе указанныхъ началъ. Разсмотримъ приведеніе гиперэллиптическихъ интеграловъ къ эллиптическимъ съ совершенно новой точки зрѣнія.

§ 2. Разсмотримъ сначала способъ приведенія гиперэллиптическаго интеграла

$$(6) \quad u = \int \frac{dx}{\sqrt{V(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)}}$$

къ эллиптическому

$$(7) \quad u = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_i)}},$$

гдѣ i равно тремъ или четыремъ. Положимъ, что приведеніе можетъ быть достигнуто посредствомъ рациональной подстановки

$$F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \xi.$$

Не входя здѣсь въ разсмотрѣніе свойствъ полиномовъ $f(x)$, $\varphi(x)$, что можетъ быть сдѣлано въ каждомъ частномъ случаѣ по той методѣ, которая указана мною въ цѣломъ рядѣ работъ, мы остановимся на одной подробности, имѣющей значеніе для настоящаго изслѣдованія. Изъ уравненія (6) видно, что x есть мономная функція аргумента u для всѣхъ значеній x за исключеніемъ $x = \infty$. Въ точкахъ развѣтвленія

$$x = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

имѣетъ мѣсто разложеніе $(x - x_i)$ по степенямъ $(u - u_i)$ преобладающимъ членомъ $(u - u_i)^2$. Во всѣхъ остальныхъ точкахъ плоскости имѣетъ мѣсто разложеніе $x - x_\kappa$ по степенямъ аргумента $u - u_\kappa$ съ преобладающимъ членомъ $(u - u_\kappa)$. Изъ уравненія (7) видно, что

$$\frac{d\xi}{du} = 0$$

въ точкахъ развѣтвленія

$$\xi = \xi_i$$

Пусть

$$x = x_j$$

при

$$\xi = \xi_i$$

Тогда имѣемъ

$$F(x_j) + (x - x_j) F'(x_j) + \frac{(x - x_j)^2}{1 \cdot 2} F''(x_j) + \dots = \xi_i + (u - u_i) \left(\frac{d\xi}{du} \right)_i + \frac{(u - u_i)^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{d^2\xi}{du^2} \right)_i + \dots$$

Такъ какъ

$$F(x_j) = \xi_i,$$

$$\left(\frac{d\xi}{du} \right)_i = 0,$$

то

$$(x - x_j) F'(x_j) + \frac{(x - x_j)^2}{1 \cdot 2} F''(x_j) + \dots = \frac{1}{2} (u - u_i)^2 \left(\frac{d^2\xi}{du^2} \right)_i + \dots$$

Отсюда слѣдуетъ, что если

$$F'(x_j) \neq 0,$$

то x_j есть точка развѣтвленія; если же

$$F'(x_j) = 0,$$

то x_j есть корень уравненія

$$(8) \quad f'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) f(x) = 0.$$

Если поэтому составить произведеніе

$$(9) \quad \left[F(x) - \xi_1 \right] \left[F(x) - \xi_2 \right] \cdots \left[F(x) - \xi_i \right] = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

$$i = 3, 4,$$

то для опредѣленія формы полиномовъ $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ нужно разсматривать два случая

1) Положим $i = 3$. Тогда $\psi(x)$ может содержать множителей только двухъ категорій. Во первыхъ въ составъ $\psi(x)$ могутъ входить линейные множители произведенія

$$(x - x_1) \dots (x - x_r) (x - x_{r+1}) \dots (x - x_n) = P_r \dots P_{n-r}$$

гдѣ

$$P_r = (x - x_1) \dots (x - x_r), \\ P_{n-r} = (x - x_{r+1}) \dots (x - x_n)$$

Во вторыхъ $\psi(x)$ можетъ содержать линейныхъ множителей полинома (8) во вторыхъ степеняхъ.

Положимъ

$$\psi(x) = P_r \dots Q^2,$$

гдѣ Q дѣлитель полинома (8). То, что сказано о цѣлой функціи $\psi(x)$, относится и до функціи $\varphi(x)$. Ясно что будетъ

$$\varphi(x) = P_{n-r} \dots Q_1^2.$$

Слѣдовательно въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ

$$(\xi - \xi_1) (\xi - \xi_2) (\xi - \xi_3) = \frac{P_r \dots Q^2}{P_{n-r}^3 Q_1^6} = \frac{P_r \dots P_{n-r} Q^2}{P_{n-r}^4 Q_1^6}$$

Полагая, какъ обыкновенно,

$$\sqrt{(x - x_1) \dots (x - x_n)} = y, \\ \sqrt{(\xi - \xi_1) (\xi - \xi_2) (\xi - \xi_3)} = \eta,$$

получимъ подстановку, опредѣляемую совокупностью двухъ уравненій:

$$\xi = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \\ \eta = \frac{Q(x) \cdot y}{P_{n-r}^2(x) Q_1^3(x)},$$

или

$$f(x) - \xi \varphi(x) = 0 \\ Q^2(x) (x - x_1) \dots (x - x_n) - \eta^2 P_{n-r}^4(x) Q_1^6(x) = 0,$$

или еще

$$(10) f(x) - \xi \varphi(x) = 0, \\ (11) P_r(x) Q^2(x) - \eta^2 P_{n-r}^3(x) Q_1^6(x) = 0.$$

Задача приводится къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя между полиномами (10) и (11).

2) Если $i = 4$, то $\varphi(x)$ не содержитъ ни множителей полинома

$$P_r(x) \dots P_{n-r}(x),$$

ни множителей во вторыхъ степеняхъ. Поэтому $\psi(x)$ будетъ формы

$$\psi(x) = P_r(x) \dots P_{n-r}(x) Q^2(x),$$

гдѣ $Q(x)$ есть дѣлитель полинома (8).

Поэтому получимъ подстановку, опредѣляемую совокупностью уравненій

$$\xi = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \\ \eta = \frac{y \cdot Q(x)}{\varphi^2(x)},$$

или

$$(12) f(x) - \xi \varphi(x) = 0. \\ (13) P_r(x) \dots P_{n-r}(x) Q^2(x) - \eta^2 \varphi^4(x) = 0.$$

Задача приводится къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя между полиномами (12) и (13).

§ 3. *Примѣръ* Найти условія приводимости интеграла

$$\int \frac{dx}{V(x^2 + px + q)(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d)}$$

къ эллиптическому посредствомъ подстановки

$$x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = X.$$

Полагая

$$X - d = \xi,$$

имѣемъ

$$(14) \quad x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx - \xi = 0.$$

Такъ какъ

$$\frac{1}{5} \frac{dX}{dx} = x^4 + 3ax^2 + 2bx + c,$$

то составляемъ произведеніе

$$(x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx)(x^4 + 3ax^2 + 2bx + c)^2(x^2 + px + q) = \xi(\xi - e_1)(\xi - e_2);$$

отсюда

$$(15) \quad (x^4 + 3ax^2 + 2bx + c)^2(x^2 + px + q) - \frac{\eta^2}{\xi} = 0.$$

Дѣля теперь (15) на (14), въ остаткѣ получимъ полиномъ 4-й степени

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = R(x),$$

гдѣ

$$\begin{aligned} \text{а) } A &= (4a^2 - 3c)q + (12ab + \xi)p + 9b^2 + 16ac - 20a^3, \\ \text{б) } B &= (12ab + \xi)q + (9b^2 + ac)p + 9bc - 80a^2b + 15bc - 4a\xi, \\ \text{в) } C &= (9bc + a\xi)p + (9b^2 + ac)q + 16c^2 - 20a^2c - 60ab^2 - 6b\xi, \\ \text{г) } D &= (9bc + a\xi)q + (c^2 - b\xi)p + (4a^2 - 3c)\xi - 60abc - 5c\xi, \\ \text{д) } E &= q(c^2 - b\xi) + 12ab\xi + \xi^2 - \frac{\eta^2}{\xi} \end{aligned}$$

Для того чтобы A равнялось нулю тождественно, имѣемъ

$$p = 0.$$

Изъ условія, что

$$B = 0$$

имѣемъ

$$q = 4a.$$

Изъ условія

$$C = 0$$

имѣемъ

$$b = 0.$$

Изъ условія

$$D = 0$$

имѣемъ

$$c = a^2.$$

Если

$$p = 0, \quad b = 0, \quad q = 4a, \quad c = a^2,$$

то всѣ коэффициенты A, B, C, D обращаются въ нуль тождественно.

Вслѣдствіе этого приводимая кривая будетъ

$$y^2 = (x^2 + 4a)(x^5 + 5ax^3 + 5a^2x + d),$$

а приведенная кривая будетъ

$$\eta^2 = \xi^3 + 4a^5\xi.$$

§ 4. Положимъ теперь, что нужно привести къ эллиптическому интегралъ

$$u = \int \frac{(x-t_1)(x-t_2)\dots(x-t_p)dx}{V \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}}$$

Для краткости положимъ

$$\begin{aligned} (x-t_1) & \quad (x-t_p) = T(x), \\ (x-x_1) & \quad (x-x_n) = R(x). \end{aligned}$$

Положимъ

$$(16) \quad F(x) = \xi = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

f и φ цѣлыя функціи.

Положимъ, что нужно данный интегралъ привести къ эллиптическому

$$u = \int \frac{d\xi}{V (\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)}$$

Разлагая (16) въ рядъ въ смежности съ одной изъ точекъ развѣтвленія

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3,$$

для которыхъ

$$\frac{d\xi}{du} = 0,$$

имѣемъ

$$F(x_0) + (x-x_0) F'(x_0) + \dots = \xi_0 + \frac{(u-u_0)^2}{1 \cdot 2} \frac{d^2\xi}{du^2} +$$

Если

$$F'(x_0) \neq 0,$$

то

$$x = x_0$$

есть одна изъ точекъ

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ выраженіи

$$\xi - \xi_0 = \frac{f(x) - \xi_0 \varphi(x)}{\varphi(x)}$$

числитель

$$f(x) - \xi_0 \varphi(x)$$

имѣетъ форму

$$f(x) - \xi_0 \varphi(x) = [\psi_1(x)]^2 R_1(x),$$

гдѣ R_1x есть дѣлитель полинома $R(x)$, а значенія x , удовлетворяющія уравненію

$$\psi_1(x) = 0,$$

суть корни уравненія

$$F'(x) = 0,$$

т. е. $\psi_1(x)$ есть дѣлитель полинома

$$f'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) f(x).$$

Такъ какъ въ смежности съ

$$t_1, t_2, \dots, t_p$$

имѣетъ мѣсто разложеніе

$$x - t = \alpha u^{\frac{1}{2}}$$

то въ числѣ корней уравненія

$$f'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) f(x) = 0$$

должны быть всѣ значенія $x=t_1, t_2$,

удовлетворяющія уравненію $T(x) = 0$;

а потому $\psi_1(x)$ есть дѣлитель полинома

$$\frac{f'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) f(x)}{T(x)}$$

На этомъ основаніи

$$(17) (\xi - \xi_1) (\xi - \xi_2) (\xi - \xi_3) = \frac{[\psi_1(x) \psi_2(x) \psi_3(x)]^2 R_1(x) R_2(x) R_3(x)}{\varphi^3(x)}$$

Въ предыдущемъ § сказано, что $\varphi(x)$ можетъ содержать множителей двоякаго рода: или квадратныхъ множителей, или линейныхъ множителей, которые дѣлятъ полиномъ $R(x)$. Не входя здѣсь въ подробное разсмотрѣніе всѣхъ случаевъ, положимъ, что $\varphi(x)$ есть дѣлитель $R(x)$; тогда

$$\psi_1(x) \psi_2(x) \psi_3(x) = \frac{f'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) f(x)}{T(x)}.$$

Называя

$$(\xi - \xi_1) (\xi - \xi_2) (\xi - \xi_3) = \eta^2,$$

имѣемъ изъ (17)

$$(18) R_1(x) R_2(x) R_3(x) \left[\frac{f'(x) \varphi(x) - \varphi'(x) f(x)}{T(x)} \right]^2 - \varphi^3(x) \eta^2 = 0$$

Задача приводится къ отысканію общаго наибольшаго дѣлителя между (18) и полиномомъ

$$f(x) - \xi \varphi(x).$$

§ 5. *Примѣръ.* Дается интегралъ

$$u = \int \frac{2(x-t)dx}{\sqrt{(x^4 + 4bx + c)(x^4 + 2px^3 + qx^2 + rx + s)}}$$

Найти t подъ условіемъ, чтобы интегралъ приводился къ эллиптическому посредствомъ подстановки

$$(19) x^4 + 4bx + c = X = \varphi(x).$$

Имѣемъ

$$\frac{1}{4}\varphi'(x) = x^3 + b.$$

Такъ какъ одинъ изъ корней этого уравненія есть

$$x = t,$$

то два другихъ корня удовлетворяютъ уравненію

$$x^2 + tx + t^2 = 0$$

По предыдущему мы должны имѣть

$$Y^2 = (x^4 + 4bx + c) (x^4 + 2px^3 + qx^2 + rx + s) (x^4 + 2tx^3 + 3t^2x^2 + 2t^3x + t^4),$$

т. е.

$$Y = y(x^2 + tx + t^2).$$

Надлежитъ поэтому выполнить преобразованіе

$$X = x^4 + 4bx + c,$$

$$Y = y(x^2 + tx + t^2).$$

которое не должно быть бираціональнымъ.

Изъ уравненія (19) имѣемъ

$$x^4 = -4bx - c + X,$$

или, полагая

$$X - c = \xi, \quad Y = \eta,$$

$$x^4 = \xi - 4bx,$$

имѣемъ

$$\eta^2 = (\xi + c) \left[2px^3 + qx^2 + (r - 4b)x + \xi + s \right] \left[2tx^3 + 3t^2x^2 + (2t^3 - 4b)x + \xi + t^4 \right],$$

$$(20) \left[2px^3 + qx^2 + (r - 4b)x + \xi + s \right] \left[2tx^3 + 3t^2x^2 + (2t^3 - 4b)x + \xi + t^4 \right] - \frac{\eta^2}{\xi + c} = 0.$$

Раздѣляя полиномъ (20) на полиномъ

$$x^4 + 4bx - \xi,$$

въ остаткѣ получимъ цѣлую функцію

$$R(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

третьей степени, коэффициенты которой суть рациональныя функции ξ и η . Осуществляя вычисленіе, находимъ

$$A = 2\xi (p + t) + 2pt^4 + 2qt^3 + 3rt^2 + (2s - 16pb)t - 12bt^2 - 4bq,$$

$$B = (q + 3t^2 + 4pt)\xi - 4b(6pt^2 + 2qt) + qt^4 + 3t^2s + (r - 4b)(2t^3 - 4b),$$

$$C = (6pt^2 + 2qt + r - 8b + 2t^3)\xi - 4b \left[4pt^3 + 3qt^2 + (2r - 8b)t - 8bp \right] +$$

$$(r - 4b)t^4 + s(2t^3 - 4b),$$

$$D = (\xi + s)(\xi + t^4) - \frac{\eta^2}{\xi + c}.$$

Выберемъ коэффициенты

$$t, b, p, q, r, s$$

подъ условіемъ, чтобы

$$A, B, C, D$$

равнялись нулю тождественно. Изъ условія

$$A = 0$$

имѣемъ

$$t = -p.$$

Изъ тождества

$$B = 0$$

имѣемъ

$$q = p^2.$$

Изъ тождества

$$C = 0$$

получаемъ

$$r = 8b - 2p^3.$$

Кромѣ того изъ равенства

$$A = 0$$

находимъ

$$2s = 3pr.$$

Изъ равенства

$$B = 0$$

находимъ

$$b = p^3,$$

а потому окончательно

$$r = 6b; s = 9p^4.$$

При этихъ условіяхъ равенство

$$C = 0$$

тождественно удовлетворяется, и уравненіе приведенной кривой будетъ

$$\eta^2 = (\xi + c)(\xi + 9p^4)(\xi + p^4);$$

уравненіе-же приводимой кривой будетъ

$$y^2 = (x^4 + 4p^3x + c)(x^4 + 2px^3 + p^2x^2 + 6p^3x + 9p^4).$$

Приводимый интегралъ будетъ

$$\int \frac{2(x+p)dx}{\sqrt{(x^4 + 4p^3x + c)(x^4 + 2px^3 + p^2x^2 + 6p^3x + 9p^4)}}.$$

§ 6. Не могу обойти молчаніемъ, что, съ точки зрѣнія изложеннаго метода, нѣтъ никакой разницы между задачей приведенія абелевыхъ интеграловъ и задачей преобразованія эллиптическихъ функцій. Для поясненія изложимъ здѣсь преобразование второй степени. Дается интегралъ

$$(21) \int \frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = u.$$

Положимъ

$$\frac{(x-e_2)(x-e_3)}{x-e_1} = \xi = \varphi(x).$$

Уравненіе

$$\varphi'(x) = 0$$

приводится здѣсь къ виду

$$x^2 - 2e_1 x - (e_1^2 + e_2 e_3) = 0.$$

Изъ уравненія

$$\xi(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) = \eta^2,$$

гдѣ

$$0, \xi_0, \xi_1$$

точки развѣтвленія преобразованной кривой, получаемъ

$$\frac{\eta^2}{\xi} = \frac{[x^2 - 2e_1 x - (e_1^2 + e_2 e_3)]^2}{(x - e_1)^2}, \text{ или}$$

$$(22) [x^2 - 2e_1 x - (e_1^2 + e_2 e_3)]^2 - (x - e_1)^2 \frac{\eta^2}{\xi} = 0.$$

Кромѣ того

$$(x - e_2)(x - e_3) - \xi(x - e_1) = 0,$$

или

$$(23) x^2 - (\xi - e_1)x + (e_2 e_3 + e_1 \xi) = 0.$$

Раздѣлимъ (22) на (23). Дойдемъ до остатка 2-й степени относительно x . Этотъ остатокъ будетъ

$$(24) \left(\xi^2 - 7e_1 \xi + 7e_1^2 - 3e_2 e_3 - \frac{\eta^2}{\xi} \right) x^2 + \left(4e_1^3 + 9e_1 e_2 e_3 - e_1 \xi^2 - e_2 e_3 \xi + 5e_1^2 \xi + 2e_1 \frac{\eta^2}{\xi} \right) x + (e_1^2 + e_2 e_3)^2 - e_1 \frac{\eta^2}{\xi} = 0.$$

Чтобы уравненія (23) и (24) были тождественны, нужно имѣть

$$\frac{\xi^2 - 7e_1 \xi + 7e_1^2 - 3e_2 e_3 - \frac{\eta^2}{\xi}}{1} = \frac{e_1 \xi^2 + (e_2 e_3 - 5e_1^2) \xi - 4e_1^3 - 9e_1 e_2 e_3 - 2e_1 \frac{\eta^2}{\xi}}{\xi - e_1} = \frac{(e_1^2 + e_2 e_3)^2 - e_1 \frac{\eta^2}{\xi}}{e_2 e_3 + e_1 \xi}$$

Отсюда легко находимъ

$$\frac{\eta^2}{\xi} = \xi^2 - 6e_1 \xi + e_1^2 - 4e_2 e_3,$$

или

$$\eta^2 = \xi^3 - 6e_1 \xi^2 + (e_1^2 - 4e_2 e_3) \xi.$$

Полагая

$$\xi = X - \alpha$$

и выбирая α подъ условіемъ, чтобы полиномъ 3-й степени относительно X не содержалъ X^2 , получимъ:

$$\alpha = -2e_1, \\ 4\eta^2 = 4X^3 - (44e_1^2 + 16e_2 e_3) X - (56e_1^3 - 32e_1 e_2 e_3).$$

Уравненіе преобразованной кривой будетъ

$$Y^2 = 4X^3 - (44e_1^2 + 16e_2 e_3) X - (56e_1^3 - 32e_1 e_2 e_3).$$

Точки развѣтвленія преобразованной кривой будутъ

$$X_1 = e_1' = -2e_1 \\ X = e_1 \pm 2\sqrt{2e_1^2 + e_2 e_3},$$

что вполне согласуется съ извѣстными результатами.

21. Теоремы, относящіяся до уравненія Монжа и Ампера.

И. П. Долбни.

(Доложено 19-го сентября).

§ 1. Дается дифференціальное уравненіе

$$(1) Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

гдѣ

$$H, K, L, M, N.$$

суть функціи

$$x, y, z, p, q;$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y};$$

r, s, t имѣютъ общепринятые значенія:

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, t = \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Положимъ, что уравненіе (1) имѣетъ интегралъ

$$(2) V(x, y, z, p, q) = 0.$$

Тогда уравненіе (2) даетъ

$$(3) \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z} + r \frac{\partial v}{\partial p} + s \frac{\partial v}{\partial q} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z} + s \frac{\partial v}{\partial p} + t \frac{\partial v}{\partial q} &= 0. \end{aligned}$$

Называя для краткости

$$\frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta_x, \frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta_y,$$

изъ (3) имѣемъ

$$(4) t\Delta_x - s\Delta_y + \frac{\partial v}{\partial p}(rt - s^2) = 0.$$

Исключая

$$rt - s^2$$

изъ (1) и (4), получаемъ:

$$(5) H \frac{\partial v}{\partial p} r + (2K \frac{\partial v}{\partial p} + N\Delta_y)s + (L \frac{\partial v}{\partial p} - N\Delta_x)t + M \frac{\partial v}{\partial p} = 0.$$

Уравненія (3) и (5) линейны относительно

$$r, s, t.$$

Рѣшая уравненія (3) и (5) относительно r, s, t , по правиламъ, излагаемымъ въ теоріи определителей, имѣемъ:

r

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial q}, & 0, & \Delta_x, \\ \frac{\partial v}{\partial p}, & \frac{\partial v}{\partial q}, & \Delta_y, \\ (2K \frac{\partial v}{\partial p} + N\Delta_y), & (L \frac{\partial v}{\partial p} - N\Delta_x), & M \frac{\partial v}{\partial p}. \end{vmatrix} =$$

s

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial q}, & 0, & \Delta_x, \\ 0, & \frac{\partial v}{\partial q}, & \Delta_y, \\ H \frac{\partial v}{\partial p}, & (L \frac{\partial v}{\partial p} - N\Delta_x), & M \frac{\partial v}{\partial p}. \end{vmatrix} =$$

t

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial p}, & \frac{\partial v}{\partial q}, & \Delta_x, \\ 0, & \frac{\partial v}{\partial p}, & \Delta_y, \\ H \frac{\partial v}{\partial p}, & (2K \frac{\partial v}{\partial p} + N\Delta_y), & M \frac{\partial v}{\partial p}. \end{vmatrix} =$$

¹⁾ Jordan, Cours d'Analyse, 1887, t. III, p. 364.

1

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial p}, & \frac{\partial v}{\partial q}, & 0, \\ 0, & \frac{\partial v}{\partial p}, & \frac{\partial v}{\partial q}, \\ H \frac{\partial v}{\partial p}, & (2K \frac{\partial v}{\partial p} + N \Delta_y), & (L \frac{\partial v}{\partial p} - N \Delta_x) \end{vmatrix}.$$

Отсюда, замѣчая, что

$$\begin{aligned} rdx + sdy &= dp \text{ и} \\ sdx + tdy &= dq, \end{aligned}$$

получаемъ

$$\begin{aligned} & \left[N \Delta_x^2 + (2K \frac{\partial v}{\partial q} - L \frac{\partial v}{\partial p}) \Delta_x + L \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_y - M \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^2 \right] dx + \\ (6) & \left[M \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} + N \Delta_x \Delta_y - H \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_x - L \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_y \right] dy = \\ & = \left[L \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 + H \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^2 - 2K \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - N \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_x - \right. \\ & \quad \left. - N \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_y \right] dp. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[M \frac{\partial v}{\partial p} + N \Delta_x \Delta_y - H \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_x - L \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_y \right] dx + \left[N \Delta_y^2 + \right. \\ (7) & \left. + 2K \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_y + H \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_x - H \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_y - M \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 \right] dy = \\ & \left[L \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 + H \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^2 - 2K \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - N \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_x - \right. \\ & \quad \left. - N \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_y \right] dq. \end{aligned}$$

Равенства (6) должны существовать при всѣхъ значеніяхъ

$$L, M, N, H, K.$$

Уравнивая въ (6) нулю коэффициентъ при M , получаемъ:

$$(A) \quad \frac{dx}{\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial v}{\partial q}}.$$

Уравнивая въ (6) нулю коэффициентъ при K , получаемъ:

$$(B) \quad \frac{dx}{\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{-dp}{\Delta_x}.$$

Уравнивая въ (7) нулю коэффициентъ при L , получимъ:

$$\frac{dx}{\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{-dq}{\Delta_y}.$$

Значить

$$(8) \quad \frac{dx}{\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial v}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial v}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial v}{\partial y} + q \frac{\partial v}{\partial z}}$$

Принявъ во вниманіе (8), увидимъ, что (6) и (7) удовлетворяются тождественно. Выберемъ x и y такъ, чтобы каждый изъ четырехъ опредѣлителей третьего порядка былъ равенъ нулю. Имѣемъ поэтому

$$\begin{aligned} L \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 + H \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^2 - 2K \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} - N \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_x - \\ - N \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_y = 0, \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} N \Delta_x^2 + \left(2K \frac{\partial v}{\partial q} - L \frac{\partial v}{\partial p} \right) \Delta_x + L \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_y - \\ - M \left(\frac{\partial v}{\partial q} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

$$M \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial v}{\partial q} + N \Delta_x \Delta_y + H \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_x - L \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_y = 0,$$

$$\begin{aligned} N \Delta_y^2 + 2K \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_y + H \frac{\partial v}{\partial p} \Delta_x - H \frac{\partial v}{\partial q} \Delta_y - \\ - M \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Принявъ во вниманіе (8), вмѣсто (9), получимъ

$$(a) \quad Ldx^2 + Hdy^2 - 2Kdxdy + Ndpdx + \\ + Ndqdy = 0,$$

$$(10) \quad (b) \quad Ndp^2 - 2Kdpdy + Ldpdx - Ldqdy - \\ - Mdy^2 = 0$$

$$(v) \quad Mdx dy + Ndp dq + Hdp dy + Ldq dx = 0,$$

$$(r) \quad Ndq^2 - 2Kdqdx - Hdpdx + Hdqdy + \\ + Mdx^2 = 0.$$

§ 3. Возьмемъ одно изъ уравненій (10) (безразлично какое) въ такой формѣ:

$$Mdx dy + N(rdx + sdy)(sdx + tdy) + Hdy(rdx + \\ + sdy) + Ldx(sdx + tdy) = 0.$$

Получимъ

$$(Nrs + Ls) dx^2 + [M + N(rt + s^2) + Hr + \\ + Lt] dxdy + (Nst + Hs) dy^2 = 0.$$

Пользуясь (1) и сокращая на s , получимъ:

$$(Nr + L) dx^2 + 2(Ns - K) dxdy + (Nt + H) dy^2 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 - 2KNs + N^2(s^2 - rt) - LNs - HNr - LH}}{Nr + L},$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 + MN - LH}}{Nr + L},$$

или

$$(12) \quad Ndp + Ldx - (K \pm \sqrt{K^2 + MN - LH}) =$$

Рѣшая (11) относительно $\frac{dy}{dx}$, находимъ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{K^2 + MN - LH}}{Nt + H}.$$

Отсюда

$$(13) Ndq + Hdy - (K \pm \sqrt{K^2 + MN - LH}) dx = 0.$$

§ 4. Примѣръ I¹⁾.

$$(x + q)^2 + 2(x + q)(y + p)s + (y + p)^2t + 2(x + q)(y + p) = 0.$$

Здѣсь

$$H = (x + q)^2, K = (x + q)(y + p), L = (y + p)^2, \\ M = 2(x + q)(y + p), N = 0, \\ K^2 + MN - LH = 0.$$

Уравненія (12) или (13) даютъ

$$\frac{dx}{x + q} = \frac{dy}{y + p}.$$

Уравн. (10) (в) даетъ

$$M(x + q)dy + H(y + p)dp + L(x + q)dq = 0,$$

или

$$2(x + q)dy + (x + q)dp + (y + p)dq = 0,$$

или

$$(x + q)dy + (y + p)dx + (x + q)dp + (y + p)dq = 0.$$

Интегрируя, получаемъ:

$$xy + qy + px + pq = \text{const.}$$

Это есть такъ называемый промежуточный интеграль.

Это уравненіе даетъ систему:

$$\frac{dx}{x + q} = \frac{dy}{y + p} = \frac{-dp}{y + p} = \frac{-dq}{x + q}.$$

Отсюда

$$x + q = \text{const.}, y + p = \text{const.}$$

Полагая

$$x + q = \alpha, y + p = \beta,$$

гдѣ α и β произвольныя постоянныя, имѣемъ:

$$p = \beta - y, q = \alpha - x;$$

¹⁾ Goursat, «Équations aux dérivées partielles du second ordre», 1896, p. 80.

$$dz = pdx + qdy = (\beta - y)dx + (\alpha - x)dy,$$

$$z = \beta x + \alpha y - xy + \text{const.},$$

$$z + (\alpha - x)(\beta - y) = \text{const.}$$

§ 4. Примѣръ II. Дается уравненіе

$$x^4r - 4x^2qs + 4q^2t + 2px^3 = 0.$$

Здѣсь

$$H = x^4, K = -2x^2q, L = 4q^2,$$

$$M = 2px^2, N = 0$$

$$K^2 + MN - LH = 0.$$

Уравненіе (12) даетъ

$$4q^2dx + 2qx^2dy = 0,$$

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{-dy}{2q}.$$

Уравненіе (10) (в) даетъ

$$2pxdx + x^2dp - 2qdq = 0,$$

или

$$pd(x^2) + x^2dp - d(q^2) = 0,$$

$$px^2 - q^2 = \text{const.}$$

Отсюда

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-2q} = \frac{-dp}{2xp} = \frac{-dq}{0}.$$

Отсюда

$$q = \alpha,$$

гдѣ α произвольное постоянное.

Кромѣ того

$$\frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \frac{dp}{p} = 0;$$

откуда

$$px^2 = \text{const.} = \beta.$$

Значитъ

$$dz = \frac{\beta}{x^2} dx + \alpha dy,$$

$$z = -\frac{\beta}{x} - \alpha y - \gamma,$$

гдѣ γ произвольная постоянная. Имѣемъ поэтому окончательно

$$\beta - zx - \alpha xy - \gamma x = 0.$$

1. Объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка.

И. П. Долбни *).

§ 1. Дается диф. уравнение

$$(1) F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

гдѣ

$$p_i = \frac{dz}{dx_i},$$

т. е.

$$(2) dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n;$$

вслѣдствіи чего

$$\frac{dp_i}{dx_k} = \frac{dp_k}{dx_i}.$$

Называя по обыкновению

$$\frac{dF}{dx_i} = X_i; \quad \frac{dF}{dp_i} = P_i; \quad \frac{dF}{dz} = Z,$$

дифференцируемъ (1) по x_1 ; получимъ

$$X_1 + Zp_1 + P_1 \frac{dp_1}{dx_1} + P_2 \frac{dp_2}{dx_1} + P_n \frac{dp_n}{dx_1} = 0,$$

или

$$(X_1 + Zp_1) + P_1 \frac{dp_1}{dx_1} + P_2 \frac{dp_2}{dx_2} + \dots + P_n \frac{dp_n}{dx_n} = 0$$

Получили для нахождения p_1 неоднородное линейное уравнение съ частными производными, которое равносильно системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка.

$$(3) \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dp_1}{X_1 + Zp_1}.$$

Дифференцируя уравнение (1) по x_2 , получимъ

$$X_2 + Zp_2 + P_1 \frac{dp_1}{dx_2} + P_2 \frac{dp_2}{dx_2} + P_3 \frac{dp_3}{dx_2} + \dots + P_n \frac{dp_n}{dx_2} = 0,$$

$$X_2 + Zp_2 + P_1 \frac{dp_2}{dx_1} + P_2 \frac{dp_2}{dx_2} + \dots + P_n \frac{dp_2}{dx_n} = 0.$$

Получили линейное неоднородное дифференціальное уравнение перваго порядка, которое равносильно системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка.

$$(4) \frac{dx_1}{P} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = - \frac{dp_2}{X_2 + Zp_2}.$$

*) Настоящая замѣтка найдена въ посмертныхъ бумагахъ И. П. Оставались неоконченными только вычисленія примѣра.

М. Акимовъ.

Ясно, что послѣдовательное дифференцирование уравненія (1) по $x_3, \dots, x_n$ дастъ намъ результаты

$$(5) \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = - \frac{dp_3}{X_3 + Zp_3},$$

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = - \frac{dp_n}{X_n + Zp_n},$$

подобные (3) и (4). Соединяя (3), (4), (5), получимъ

$$(6) \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = - \frac{dp_1}{X_1 + Zp_1} = \dots$$

$$= - \frac{dp_n}{X_n + Zp_n} = dt.$$

Отсюда

$$dx_1 = P_1 dt, \quad dx_2 = P_2 dt, \quad \dots, \quad dx_n = P_n dt.$$

Вслѣдствіи чего уравнение (2) даетъ

$$dz = (P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots + P_n p_n) dt = dt \sum P p$$

Поэтому имѣемъ такую систему

$$(7) \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = - \frac{dp_1}{X_1 + Zp_1} =$$

$$= - \frac{dp_2}{X_2 + Zp_2} = \dots = - \frac{dp_n}{X_n + Zp_n} = \frac{dz}{\sum P p} = dt.$$

§ 2. Чтобы подчинить тому же анализу методу Якоби, беремъ уравнение

$$(8) \frac{dV}{dz} + H(x_1, x_2, \dots, x_n, P_1, P_2, \dots, P_n) = 0,^1)$$

$$\text{гдѣ } P_i = \frac{dV}{dx_i};$$

$$\text{назовемъ } \frac{dV}{dz} = q.$$

Дифференцируемъ (8) по z ; получимъ

$$(9) \frac{dq}{dz} + \frac{dH}{dp_1} \frac{dp_1}{dz} + \frac{dH}{dp_2} \frac{dp_2}{dz} + \dots + \frac{dH}{dp_n} \frac{dp_n}{dz} = 0.$$

$$\text{Но } \frac{dp_i}{dz} = \frac{d}{dx_i} \left(\frac{dV}{dz} \right) = \frac{dq}{dx_i}.$$

Поэтому уравнение (9) приметъ форму

$$\frac{dq}{dz} + \frac{dH}{dp_1} \frac{dq}{dx_1} + \frac{dH}{dp_2} \frac{dq}{dx_2} + \dots + \frac{dH}{dp_n} \frac{dq}{dx_n} = 0.$$

Получили однородное линейное дифференціальное уравнение перваго порядка съ частными произ-

¹⁾ Jordan, t. III, 1887, p. 328.

водными относительно q . Уравнение это равносильно системѣ обыкновенныхъ совокупныхъ дифференціаль-ныхъ уравнений первого порядка.

$$(10) \frac{dx_1}{dp_1} = \frac{dx_2}{dp_2} = \dots = \frac{dx_n}{dp_n} = dz.$$

Дифференцируя теперь (8) по x_i , получимъ

$$(11) \frac{dH}{dx_i} + \frac{dq}{dx_i} + \frac{dH}{dp_1} \frac{dp_1}{dx_i} + \frac{dH}{dp_2} \frac{dp_2}{dx_i} + \dots + \frac{dH}{dp_n} \frac{dp_n}{dx_i} = 0.$$

Такъ какъ

$$\frac{dq}{dx_i} = \frac{dp_i}{dz}, \quad \frac{dp_k}{dx_i} = \frac{dp_i}{dx_k},$$

то, вмѣсто (11), получимъ

$$\frac{dH}{dx_i} + \frac{dp_i}{dz} + \frac{dH}{dp_1} \frac{dp_1}{dx_i} + \frac{dH}{dp_2} \frac{dp_1}{dx_2} + \dots + \frac{dH}{dp_n} \frac{dp_i}{dx_n} = 0.$$

А отсюда система

$$(12) \frac{dx_1}{dp_1} = \frac{dx_2}{dp_2} = \dots = \frac{dx_n}{dp_n} = dz = - \frac{dp_i}{\frac{dH}{dx_i}},$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Изъ (10) и (12) имѣемъ

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{dx_2}{dp_2} = \dots = \frac{dx_n}{dp_n} = - \frac{dp_1}{\frac{dH}{dx_1}} = - \frac{dp_2}{\frac{dH}{dx_2}} = \dots = - \frac{dp_n}{\frac{dH}{dx_n}} = dz.$$

Или, придерживаясь обыкновеннаго обозначенія, имѣемъ

$$\frac{dx_k}{dz} = \frac{dH}{dp_k}, \quad \frac{dp_k}{dz} = - \frac{dH}{dx_k},$$

$k = 1, 2, \dots, n.$

§ 3. Вообразимъ линейное однородное уравненіе съ частными производными первого порядка

$$X_\varphi^h = X_1^h \frac{d\varphi}{dx_1} + \dots + X_m^h \frac{d\varphi}{dx_m} + \dots + X_{m+n}^h \frac{d\varphi}{dx_{m+n}} = 0.$$

Или, употребляя обозначеніе

$$\frac{d\varphi}{dx_i} = P_i,$$

получимъ

$$X_\varphi^h = X_1^h p_1 + X_2^h p_2 + \dots + X_{m+n}^h p_{m+n} = 0.$$

Этому уравненію соответствуетъ система

$$(13) \frac{dx_1}{X_1^h} = \dots = \frac{dx_{m+n}}{X_{m+n}^h} =$$

$$= - \frac{dp_1}{p_1 \frac{dX_1^h}{dx_1} + p_2 \frac{dX_2^h}{dx_1} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^h}{dx_1}} =$$

$$= - \frac{dp_2}{p_1 \frac{dX_1^h}{dx_2} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^h}{dx_2}} = \dots = - \frac{dp_{m+n}}{p_1 \frac{dX_1^h}{dx_{m+n}} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^h}{dx_{m+n}}}.$$

Пусть теперь другое уравненіе

$$X_\varphi^k = X_1^k \frac{d\varphi}{dx_1} + \dots + X_{m+n}^k \frac{d\varphi}{dx_{m+n}} = 0$$

имѣетъ тотъ же, что и $X_\varphi^h = 0$ интеграль φ ; тогда

$$X_\varphi^k = X_1^k p_1 + \dots + X_{m+n}^k p_{m+n} = 0.$$

Отсюда имѣемъ

$$\left(p_1 \frac{dX_1^k}{dx_1} + p_2 \frac{dX_2^k}{dx_1} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^k}{dx_1} \right) dx_1 +$$

$$+ \left(p_1 \frac{dX_1^k}{dx_2} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^k}{dx_2} \right) dx_2 + \dots$$

$$+ X_1^k dp_1 + X_2^k dp_2 + \dots + X_{m+n}^k dp_{m+n} = 0.$$

Подставляя сюда изъ (13) вмѣсто

$$dx_1, dx_2, \dots, dp_1, dp_2, \dots$$

равныя имъ величины, получимъ

$$\left(p_1 \frac{dX_1^k}{dx_1} + p_2 \frac{dX_2^k}{dx_1} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^k}{dx_1} \right) X_1^h +$$

$$+ \left(p_1 \frac{dX_1^k}{dx_2} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^k}{dx_2} \right) X_2^h + \dots -$$

$$- X_1^k \left(p_1 \frac{dX_1^h}{dx_1} + p_2 \frac{dX_2^h}{dx_1} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^h}{dx_1} \right) -$$

$$- X_2^k \left(p_1 \frac{dX_1^h}{dx_2} + p_2 \frac{dX_2^h}{dx_2} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^h}{dx_2} \right) - \dots$$

$$- X_{m+n}^k \left(p_1 \frac{dX_1^h}{dx_{m+n}} + \dots + p_{m+n} \frac{dX_{m+n}^h}{dx_{m+n}} \right) = 0.$$

Или

$$\left(X_1^h \frac{dX_1^k}{dx_1} - X_1^k \frac{dX_1^h}{dx_1} + X_2^h \frac{dX_1^k}{dx_2} - X_2^k \frac{dX_1^h}{dx_2} + \dots \right) p_1 +$$

$$+ \left(X_1^h \frac{dX_2^k}{dx_1} - X_1^k \frac{dX_2^h}{dx_1} + X_2^h \frac{dX_2^k}{dx_2} - X_2^k \frac{dX_2^h}{dx_2} + \dots \right) p_2 + \dots$$

$$+ \left(X_1^h \frac{dX_{m+n}^k}{dx_1} - X_1^k \frac{dX_{m+n}^h}{dx_1} + \dots \right) p_{m+n} = 0$$

$$= \left(X^h \frac{dX^k}{dx} - X^k \frac{dX^h}{dx} \right) \varphi = 0.$$

Примѣръ. Дается система

$$(1) 2x_2 x_4^2 p_1 + x_3^2 x_4 p_4 + x_3^2 x_5 p_5 = 0,$$

$$(2) 2x_2 p_2 - x_4 p_4 - x_5 p_5 = 0,$$

$$(3) x_2 x_4^2 p_3 + x_1 x_3 x_4 p_4 + x_1 x_3 x_5 p_5 = 0.$$

Изъ (1) имѣемъ

$$\frac{dx_1}{2x_2 x_4^2} = \frac{dx_4}{x_3^2 x_4} = \frac{dx_5}{x_3^2 x_5} = \frac{-dp_2}{2x_4^2 p_1} =$$

$$(a) \frac{-dp_3}{2x_3 x_4 p_4 + 2x_3 x_5 p_5} = \frac{-dp_4}{4x_2 x_4 p_1 + x_3^2 p_4} = \frac{-dp_5}{x_3^2 p_5}.$$

Дифференцируя (2) и принимая во вниманіе систему (а), имѣемъ
 $-p_4 x_3^2 x_4 - p_5 x_3^2 x_5 - 4 x_2 x_4^2 p_1 + 4 x_2 x_4^2 p^1 + x_3^2 x_4 p_4 +$
 $+ x_3^2 x_5 p_5 = 0$ тождественно.

Дифференцируя (3) и принимая во вниманіе систему (а), получимъ
 $2 x_2 x_4^2 (x_3 x_4 p_4 + x_3 x_5 p_5) + x_3^2 x_4 (2 x_2 x_4 p_3 + x_1 x_3 p_4) +$
 $+ x_1 x_3^3 x_5 p_5 - x_2 x_4^2 (2 x_3 x_4 p_4 + 2 x_3 x_5 p_5) -$
 $- x_1 x_3 x_4 (4 x_2 x_4 p_1 + x_3^2 p_4) - x_1 x_3^3 x_5 p_5 = 0$, или
 $2 x_2 x_3^2 x_4^2 p_3 - 4 x_1 x_2 x_3 x_4^2 p_1 = 0$, или
 $(4) x_3 p_3 - 2 x_1 p_1 = 0$.

Это уравненіе не даетъ новаго соотношенія, ибо оно получается изъ (1) и (3) чрезъ исключеніе p_4 и p_5 .

Изъ (2) имѣемъ

$$(6) \frac{dx_2}{2x_2} = \frac{dx_4}{-x_4} = \frac{dx_5}{-x_5} = \frac{-dp_2}{2p_2} = \frac{-dp_4}{-p_4} = \frac{-dp_5}{-p_5}.$$

Дифференцируя (3) и принимая во вниманіе систему (б), имѣемъ

$$2 x_2 x_4^2 p_3 - 2 x_2 x_4^2 p_3 - x_1 x_3 x_4 p_4 + x_1 x_3 x_4 p_4 -$$

 $- x_1 x_3 x_5 p_5 + x_2 x_3 x_5 p_5 = 0$ тождественно.

Интегрируя (а), получаемъ сперва

$$x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2 = C_1, \quad \frac{x_4}{x_5} = C_2.$$

Общій интегралъ (1) будетъ

$$f(x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2, \frac{x_4}{x_5}, x_2, x_3).$$

Подставляя его въ (2) имѣемъ

$$\frac{df}{dx_2} = 0;$$

подставляя въ (3), получаемъ

$$\frac{df}{dx_3} = 0.$$

Общій интегралъ данной системы будетъ

$$f(x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2, \frac{x_4}{x_5}).$$

Памяти И. П. Долбни.

2-го февраля 1912 г., около часа дня, скончался въ Биржевой больницѣ, послѣ произведенной операціи д. с. с. директоръ и ординарный профессоръ Горнаго Института Императрицы Екатерины II, Иванъ Петровичъ Долбня, въ возрастѣ 59 лѣтъ.

О послѣдовавшей кончинѣ директора Горнаго Института и. д. директора, немедленно сообщилъ Управляющему Учебнымъ Отдѣломъ Министерства и просилъ ходатайствовать передъ г. Министромъ Торговли и Промышленности объ отпускѣ средствъ на погребеніе покойнаго. Ходатайство Управляющаго Учебнымъ Отдѣломъ было Его Высокопревосходительствомъ г. Министромъ уважено, и сообщено, что расходы по погребенію Министерство принимаетъ на себя.

3-го февраля состоялось перенесеніе тѣла скончавшагося директора горнаго института И. П. Долбни изъ часовни биржевой больницы на квартиру покойнаго въ зданіи института. За гробомъ слѣдовали профессора, преподаватели и студенты института. Гробъ всю дорогу несли на рукахъ студенты.

Въ два часа дня была отслужена панихида, на которой, присутствовали: министръ торговли и промышленности С. И. Тимашевъ, тов. министра торговли и промышленности Д. П. Коноваловъ, управляющій учебнымъ отдѣломъ министерства торговли и промышленности А. Е. Лагоріо, профессора горнаго института, многіе студенты и др.

4-го февраля у гроба директора горнаго института И. П. Долбни была отслужена панихида, на которой присутствовали члены совѣта института въ полномъ составѣ и многіе студенты. На гробъ покойнаго возложены вѣнки отъ Спб. Біологической Лабораторіи имени П. Ф. Лесгафта, отъ профессоровъ и служащихъ Горнаго Института („Незабвенному дорогому товарищу и директору“), отъ служителей Горнаго Института, отъ сторожей Горнаго Института съ надписью— „Дорогому и справедливому нашему начальнику“, отъ Л. И. Лутугина, Б. И. Бокія и др.

5 февраля состоялось погребеніе директора Горнаго Института проф. И. П. Долбни. Похороны привлекли многочисленную публику. Въ 10 ч. утра на квартирѣ покойнаго

была отслужена панихида, а затѣмъ тѣло было перенесено въ церковь Горнаго Института, гдѣ состоялось отпѣваніе. Въ храмѣ среди многочисленныхъ молящихся присутствовали министръ торговли и промышленности С. И. Тимашевъ, тов. министра торговли и промышленности Д. П. Коноваловъ, тов. министра путей сообщенія Н. Л. Щукинъ, управляющій учебнымъ отдѣломъ министерства торговли и промышленности А. Е. Лагорио, акад. Ѳ. Н. Чернышевъ, проф. А. А. Брандтъ и др.

Послѣ выноса тѣла изъ церкви у входа въ институтъ и. д. директора Горнаго Института проф. И. Ф. Шредеръ произнесъ рѣчь:

„Въ лицѣ Ивана Петровича Долбни сходитъ въ могилу не только профессоръ и директоръ Горнаго Института Императрицы Екатерины II, но и представитель тѣхъ культурныхъ стремленій и силъ, которыя таятся въ нѣдрахъ массъ народа русскаго.

Подобно тому какъ водный потокъ сноситъ съ собою на своемъ пути все кромѣ золота, такъ точно жизненному потоку не унести въ болото житейскихъ будней людей съ возвышенными стремленіями, къ числу которыхъ принадлежалъ покойный.

Иванъ Петровичъ, вышедшій изъ темной глубины народа, солдатскій сынъ, запечатлѣнный дарованіями и страстнымъ стремленіемъ къ знанію, нашелъ въ себѣ силу преодолѣть нужду и всѣ препятствія съ нею сопряженныя, и окончить Горный Институтъ.

По окончаніи Института Иванъ Петровичъ не соблазняется открывающейся передъ нимъ возможностью примѣнить свои дарованія на широкомъ поприщѣ промышленной дѣятельности, на томъ поприщѣ, гдѣ дарованія щедрѣ всего оплачиваются, а, проникнутый уваженіемъ къ знанію и дѣлу его распространенія, избираетъ скромный путь педагогическаго труда.

Трудныя двадцать лѣтъ преподавательской жизни въ провинціи, въ той провинціи русской, которая засосала не одну живую душу, не повредила ему. „Талантъ образуется въ тиши“ сказалъ Гете, и въ тиши Аракчеевскаго Корпуса, справедливо гордящагося, что изъ среды его преподавателей вышелъ Ив. Петр., развилось дарованіе и создались работы, которыя поставили имя Долбни въ одинъ рядъ съ тѣми именами русскихъ математиковъ, которыя извѣстны за предѣлами своего отечества.

Эти же труды подарили Горному Институту блестящаго профессора, посвятившаго Институту разцвѣтъ своего дарованія.

Но не только 15 лѣтъ своего дарованія отдалъ Ив. Петр. своей alma mater, онъ отдалъ ей также 15 лѣтъ своей страстной, доброй и непосредственной души, переживая съ Институтомъ всѣ перипетіи тяжелыхъ минувшихъ лѣтъ.

Поэтому сегодня мы провожаемъ въ лицѣ Ив. Петр. не только стихійное проявленіе народнаго духа, поднявшее его изъ глубинъ народныхъ на высоту, откуда исходятъ лучи науки, озаряющей своимъ свѣтомъ народную жизнь и направляющую ее къ культурному благу, но въ немъ мы провожаемъ и товарища, съ которымъ насъ сроднило и общее дѣло, и общія переживанія, учителя, примѣромъ своимъ показавшаго, какъ надо стремиться къ знанію, и какъ надо уважать въ себѣ дарованіе.

Миръ и покой душѣ Твоей, все что могъ, Ты сдѣлалъ и Имя профессора Ивана Петровича Долбни не умретъ въ стѣнахъ Института и сердцахъ учениковъ“.

Отъ имени студентовъ Института прощальное слово произнесъ студ. Сольдау.

Гробъ вынесли и процессія направилась къ Смоленскому кладбищу. Гробъ всю дорогу несли студенты Горнаго Института; въ продолженіе всего пути пѣлъ хоръ изъ учащихся. На катафалкѣ были возложены вѣнки отъ министерства торговли и промышленности, отъ профессоровъ, преподавателей и служащихъ Горнаго Института, отъ бывшихъ лесгафтичекъ, отъ студентовъ Горнаго Института—членовъ группы „Единеніе“, отъ высшихъ женскихъ политехническихъ курсовъ, отъ служителей и сторожей Горнаго Института и др.

У свѣжей могилы произнесли рѣчи студенты Горнаго Института Казаковъ, Стасюкъ и Обуховскій.

Ораторы охарактеризовали покойнаго, какъ человѣка, педагога и администратора.

Согласно постановленію Совѣта 18-го марта состоялось торжественное собраніе, посвященное чествованію памяти профессора Ивана Петровича Долбни.

Въ этомъ засѣданіи, кромѣ профессоровъ Института Н. Н. Яковлева и Н. М. Крылова, пожелалъ принять участіе Членъ Государственнаго Совѣта, предсѣдатель математическаго общества при Казанскомъ Университетѣ, профессоръ Александръ Васильевичъ Васильевъ, почтившій Ивана Петровича рѣчью отъ имени математическаго общества Казанскаго Университета, а такъ же Генераль-Лейтенантъ Евгеній Евстафьевичъ Семашкевичъ, приславшій свои воспоминанія.

Собраніе привлекло многочисленныхъ слушателей.

Совѣтъ Горнаго Института выражаетъ всѣмъ лицамъ, принявшимъ участіе въ чествованіи памяти Ивана Петровича, свою глубокую благодарность.

Засѣданіе открылъ профессоръ И. Ф. Шредеръ нижеслѣдующими словами:

„2-го февраля скончался Иванъ Петровичъ Долбня въ возрастѣ 59 лѣтъ и это было полной неожиданностью для всѣхъ, знавшихъ Ивана Петровича. Всѣ, приходившіе съ нимъ въ соприкосновеніе, глядя на его сильную фигуру, слушая его живую, полную энергіи рѣчь, не могли и думать, что часы его были сочтены.

Но самъ Иванъ Петровичъ давно уже думалъ иначе.

Когда приходилось говорить ему, глядя на его прямо молодой азартъ: Иванъ Петровичъ, сколько въ Васъ молодости и энергіи, онъ обыкновенно отвѣчалъ: Иванъ Федоровичъ, это не силы и молодость—это только нервы! И мнѣ всегда не вѣрилось этому.

Только прошлой весной, когда мы вмѣстѣ шли по набережной и онъ заговорилъ со мной о своемъ уходѣ къ осени въ отставку, и на мои возраженія и убѣжденія о необходимости еще оставаться въ Институтѣ, онъ мнѣ отвѣтилъ, что все это можетъ быть и справедливо, но что онъ такъ усталъ и такъ хочетъ отдохнуть: „вѣдь я Иванъ Федоровичъ, до сихъ поръ не жилъ, я вѣдь только работалъ, вѣдь имѣю же я наконецъ право хоть немножко пожить не какъ работникъ, какъ человѣкъ!“ И сказалъ это такимъ тономъ, который и сейчасъ у меня звучитъ въ ушахъ. Только тогда я понялъ, что хотя душа его и молода, но тяжелыя условія пережитой жизни, пол-

ной нужды и лишеній какъ матеріальныхъ такъ и духовныхъ, надорвали этотъ сильный тѣломъ и душою организмъ и онъ жаждетъ покоя и отдыха.

Но мечтамъ его пожить хотя немного человѣкомъ, а не работникомъ, было не суждено исполниться. Износившееся сердце не дало ему силы перенести операцію; 2-го февраля Ивана Петровича не стало и мы похоронили въ немъ своего товарища, а общество одного изъ представителей силъ русскаго народа, таящихся въ глубинѣ его нѣдръ; представителя идеализма и культурныхъ стремленій, скрывающихся въ нижнихъ слояхъ нашего народа, выбивающихся при первой возможности, преодолевая всѣ трудности и лишенія, на поверхность, чтобы засвидѣтельствовать передъ обществомъ и напомнить ему, сколько силъ и дарованія теряются отъ того, что свѣтъ ученія и знанія не проникаетъ на эти глубины, и какое прекрасное будущее они обѣщаютъ и какимъ залогомъ они являются культурнаго преуспѣнія русскаго народа.

Совѣтъ Горнаго Института Императрицы Екатерины II, желая почтить память Ивана Петровича, постановилъ въ сегодняшнемъ собраніи охарактеризовать научно-педагогическую дѣятельность и подѣлиться біографическими свѣдѣніями, а также и воспоминаніями друзей покойнаго, могущими освѣтить его личность“.



И. П. Долбня.

(31 Января 1853 г.—2 Февраля 1912 г.).

(Рѣчь Н. М. Брылова).

Въ настоящемъ краткомъ очеркѣ, посвященномъ преимущественно учено-педагогической дѣятельности покойнаго профессора, мнѣ бы хотѣлось прежде всего подѣлиться съ читателями, воспоминаніями о томъ незабвенномъ, неизгладимомъ впечатлѣніи, которое произвели на меня, какъ вѣроятно и почти на всѣхъ его бывшихъ слушателей, въ свое время его лекціи.

Незадолго до смерти Ивана Петровича, мнѣ довелось въ личной бесѣдѣ съ нимъ услышать изъ устъ его такую фразу (едва-ли не послѣднія его слова при жизни, слышанная мной): „могутъ отрицать, говорилъ онъ, у меня все, даже математическій талантъ, но нельзя отрицать того, что въ свое время я прилично читалъ лекціи.“ — Эти слова покойнаго профессора считаю умѣстнымъ привести не только потому, что въ нихъ отбѣняется, въ весьма скромныхъ выраженіяхъ впрочемъ, сознаніе своихъ безспорныхъ педагогическихъ дарованій, но также и потому, что истинная скромность, которой они проникнуты, лучше всего характеризуетъ нравственный обликъ покойнаго.

Принято говорить, что Иванъ Петровичъ былъ выдающимся лекторомъ; кто хоть разъ присутствовалъ на его лекціи, не могъ не согласиться съ этимъ мнѣніемъ, ставшимъ своего рода аксіомой для всѣхъ его бывшихъ слушателей; секретъ его успѣха (если позволительно будетъ такъ выразиться) помимо природнаго блестящаго педагогическаго таланта, заключался, по нашему мнѣнію, въ той рѣдкой добросовѣстности, неоднократно уже отмѣченной, съ которой покойный относился къ своимъ обязанностямъ — чтенію лекцій: „передъ доской некогда обдумывать, неоднократно говаривалъ онъ, вся подготовительная работа должна быть произведена заранее“.

Эта подготовительная—черновая работа, на которую такъ опредѣленно указывалъ покойный Иванъ Петровичъ, придавала его лекціямъ отпечатокъ простоты и изящества, а его изложенію ту ясность и опредѣленность, которая хотя и трудно достижима, но всегда желательна въ преподаваніи наукъ точныхъ и особенно наукъ математическихъ.

Будучи педагогомъ в теченіи долгаго ряда лѣтъ и вдобавокъ педагогомъ по призванію, покойный профессоръ зналъ свою аудиторію, его прежняя дѣятельность въ

роли скромнаго преподавателя средняго учебнаго заведенія (Нижегородскій кадетскій корпусъ), помимо весьма цѣннаго опыта, вселила въ немъ извѣстное скептическое отношеніе (на которое онъ безспорно имѣлъ право) къ среднему умственному уровню своихъ слушателей и Иванъ Петровичъ часто любилъ повторять слова Бертрана: „изъ всѣхъ педагогическихъ приѣмовъ наилучшимъ долженъ быть признанъ тотъ, который наименѣе разсчитываетъ на проницательность учащихся! Можно быть разумѣется различныхъ мнѣній относительно примѣнимости педагогическаго афоризма Бертрана, но... побѣдителей не судятъ, а покойный профессоръ безспорно былъ имъ, если судить по результатамъ: до самаго послѣдняго времени, т. е. до введенія такъ наз. предметной системы, лекціи его были охотно посѣщаемы студентами и аудиторія была всегда полна, что немалоцѣнно въ наше время, когда студенты особенно осторожны въ дѣлѣ посѣщенія лекцій и когда, по мѣткому выраженію покойнаго, сказанному имъ по другому поводу: „надо обладать не человѣческимъ талантомъ, чтобы загнать слушателей въ аудиторію“.

Обиліе слушателей, и притомъ различныхъ категорій, объяснялось не только тѣмъ, что большинству облегчалось усвоеніе курса, а потому и подготовка къ экзаменамъ, но главнымъ образомъ, по нашему мнѣнію, тѣмъ, что умѣлыми и, что еще важнѣе, умѣстными отступленіями отъ непосредственнаго предмета лекцій покойный профессоръ интересовывалъ слушателей, открывая восхищенному взору лучшей части аудиторіи всю ширь и глубину науки наукъ; такъ слушателямъ зимняго семестра 1901—02 г. особенно памятны вѣроятно отступленія, связанныя съ такъ наз. задачей обращенія эллиптическаго интеграла, т. е. съ тѣмъ вопросомъ, въ связи съ которымъ находятся лучшіе и плодотворные результаты научной дѣятельности покойнаго ученаго.

Вышеприведенныя черты для характеристики педагогической дѣятельности покойнаго страдали бы неполнотою, если бы мы обошли молчаніемъ о тѣхъ энергичныхъ и смѣлыхъ выступленіяхъ, свидѣтелемъ которыхъ намъ довелось быть. Въ нихъ покойный профессоръ въ яркихъ и сильныхъ словахъ выражалъ свое негодованіе по поводу исходившаго въ свое время отъ слушателей предложенія относительно сокращенія курса, объемомъ итакъ доведеннаго до возможнаго минимума: „я вижу, говорилъ онъ по этому поводу, „что вы хотите сдѣлать высшее образованіе доступнымъ всѣмъ, — прекрасная цѣль! Но какими же путями хотите вы ее достигнуть? Не посредствомъ улучшенія методовъ преподаванія, не посредствомъ возвышенія науки, но посредствомъ умаленія ея до пониманія лѣниваго ума“.

Будучи человѣкомъ въ высшей степени добрымъ, свободнымъ отъ всякой возможности упрека въ проявленіи какого бы то ни было безсердечія по общему, справедливому свидѣтельству всѣхъ лицъ близко его знавшихъ, Иванъ Петровичъ не дѣлалъ, по крайней мѣрѣ за моей памятью, никогда уступокъ въ вопросахъ важныхъ, основныхъ, затрагивавшихъ достоинство предмета, который онъ, по его собственному выраженію, имѣлъ честь преподавать. Позволяю себѣ отмѣтить эту черту въ характерѣ покойнаго, заслуживающую, по моему мнѣнію, величайшаго уваженія.

Обращаясь къ научнымъ трудамъ Ивана Петровича, надлежитъ замѣтить, что при

всемъ обилии работъ покойнаго ученаго не представляетъ особой трудности охарактеризовать направление его математической научной дѣятельности, ибо она отличается поразительнымъ единствомъ цѣли, поразительнымъ упорствомъ въ достиженіи результатовъ по разѣ намѣченному пути и пути весьма тернистому, гдѣ обильная жатва была уже собрана такими выдающимися математиками, какъ Чебышевъ и Золотаревъ гдѣ, казалось бы, достиженіе новыхъ результатовъ болѣе чѣмъ затруднительно.

Изъ приложеннаго въ концѣ этого выпуска списка, вмѣстѣ съ краткими рецензіями о нихъ тѣхъ работъ Ив. Петр., которыя намъ удалось достать, нельзя сдѣлать заключенія о томъ, насколько солиденъ его математическій багажъ, если судить о немъ хотя-бы только формально по числу работъ его, печатавшихся въ лучшихъ иностранныхъ математическихъ журналахъ. Среди работъ Ивана Петровича особенно важное значеніе имѣютъ тѣ, которыя посвящены вопросу о приведеніи абелевыхъ интеграловъ и въ частности вопросу о такъ наз. псевдо-эллиптическихъ интегралахъ, т. е. вопросу о выразимости въ конечномъ видѣ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ интеграловъ отъ алгебраическихъ функцій, гдѣ единственной входящей ирраціональностью былъ-бы квадратный радикалъ изъ полинома 3-ей или 4-й степени. Вопросъ этотъ помимо спеціально математическаго, имѣетъ и глубокий философскій интересъ, ибо онъ стоитъ, такъ сказать, на рубежѣ отдѣляющемъ высшую математику періода Эйлера и Lagrange'a отъ высшей математики современныхъ математическихъ воззрѣній.

Уже при самомъ началѣ своей безсмертной созидательной работы Леонарду Эйлеру, также впрочемъ какъ и другимъ его знаменитымъ современникамъ, пришлось натолкнуться на вопросъ объ интегрированіи въ конечномъ видѣ ирраціональных дифференціаловъ, въ частности эллиптическихъ, и слѣдую научнымъ традиціямъ той эпохи попытаться выразить ихъ въ конечномъ видѣ, что удалось имъ лишь въ весьма немногихъ частныхъ случаяхъ. Значительно позднѣе, французскимъ математикомъ Liouville'емъ было доказано, что вопросъ объ интегрированіи ирраціональных дифференціаловъ, гдѣ подъ знакомъ радикала входитъ полиномъ 3-ей или 4-ой степени, — вообще говоря приводитъ къ новымъ трансцендентнымъ; изученіе ихъ и было многолѣтъ раньше предметомъ сперва работъ Legendre'a, затѣмъ съ новой точки зрѣнія т. н. идеи обращенія Абелемъ и Якоби; наконецъ въ самое позднѣйшее время путемъ введенія своихъ знаменитыхъ функцій $p(u)$ и $\sigma(u)$ Вейерштрасомъ.

Изъ предъидущаго, необходимаго для пониманія всего дальнѣйшаго, краткаго изложенія исторіи вопроса видимъ, что геометры, встрѣтивъ нѣкоторую аналитическую трудность, обошли ее, предложивши себѣ иную задачу — изученіе свойствъ новыхъ трансцендентныхъ, но основной вопросъ, вопросъ Эйлера и Lagrange'a, вопросъ о выразимости въ конечномъ видѣ интеграловъ алгебраическихъ дифференціаловъ остался открытымъ и былъ разрѣшенъ только въ весьма немногихъ частныхъ случаяхъ.

Наиболѣе логичнымъ, а потому и наиболѣе естественнымъ представлялся бы, съ перваго взгляда, такой путь: прежде чѣмъ приступать къ изученію новыхъ трансцендентныхъ по мѣрѣ того, какъ онѣ представляются въ анализѣ, надлежало-бы покон-

читать разъ навсегда съ предшествующимъ и, казалось бы, болѣе простымъ вопросомъ о выразимости въ конечномъ видѣ интеграловъ отъ алгебраическихъ дифференціаловъ. Такъ должно было бы быть, но аналитическія трудности, возникавшія при попыткахъ окончательнаго разрѣшенія этого вопроса, остановили въ свое время усилія крупнѣйшихъ европейскихъ математиковъ и принудили геометровъ, идя обходнымъ путемъ, заняться изученіемъ свойствъ новыхъ трансцендентныхъ, каковыя свойства, кстати сказать, позволили Золотареву и Ив. Петр. высказать тѣ критеріи, о которыхъ рѣчь будетъ впереди.

Изъ русскихъ математиковъ, если не считать работъ Остроградскаго, по выдѣленію алгебраической части интеграла, впервые Чебышевъ съ успѣхомъ занялся вопросомъ о выразимости въ конечномъ видѣ интеграловъ отъ алгебраическихъ дифференціаловъ; теоремы, высказанныя имъ относительно такъ наз. псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Абеля, были доказаны Золотаревымъ (въ *Math. Annalen*), посвятившимъ свою диссертацию этому вопросу.

Работы Золотарева связываютъ вопросъ съ высшими областями теоріи чиселъ и отличаются чрезвычайной сложностью; въ немалой степени это объясняется тѣмъ обстоятельствомъ, какъ справедливо замѣтилъ Иванъ Петровичъ, что Золотаревъ пользовался при своемъ изслѣдованіи старыми эллиптическими функціями Якоби, помощью которыхъ рѣшеніе т. н. задачи обращенія (разсмотрѣніе верхняго предѣла интеграла, какъ функціи самого интеграла) сопряжено со значительными трудностями.

Рѣшенію поставленнаго Чебышевымъ вопроса о нахожденіи такого значенія постоянн., чтобы интегралъ $\int \frac{(x+H) dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}}$ выражался помощью логарифмовъ, и была посвящена одна изъ наиболѣе серьезныхъ работъ Ив. Петр.: „*Sur les integrales pseudoelliptiques d'Abel*“, напечатанная въ „*Journal des Math. pures et appliquées*“ (1890) и анализированная въ журналѣ „*Bulletin des Sciences Math.*“ (1901. стр. 286).

Въ этомъ мемуарѣ, освободившись прежде всего помощью линейной подстановки отъ члена съ 3-ей степенью переменнѣй въ выраженіи подрадикальнаго полинома, авторъ извлекаетъ изъ него цѣлую часть и обозначая остатокъ путемъ введенія новой переменнѣй, получаетъ между обоими переменными квадратичное соотношеніе, позволившее ему примѣняя извѣстную теорему Якоби придти къ весьма удобной формѣ обращенія эллиптическихъ интеграловъ.

Примѣняя затѣмъ формулы Вейерштрассовой теоріи эллиптическихъ функцій, рядомъ весьма остроумныхъ соображеній авторъ устанавливаетъ два численныхъ ряда, періодичность которыхъ представляетъ достаточное условіе для выразимости интеграла въ логариомахъ, т. е. принадлежности интеграла къ категоріи псевдо-эллиптическихъ. Если одинъ изъ вышеупомянутыхъ рядовъ обнаруживаетъ свою періодичность по истеченіи нѣкотораго даннаго числа операцій, то авторъ даетъ также способъ дѣйствительнаго вычисленія логариома, представляющаго данный интегралъ, причемъ, слѣдуетъ оговориться, что число членовъ періода, не можетъ быть вышеприведенными

методами установлено *à priori*. Возникающія при рѣшеніи этого вопроса аналитическія трудности весьма серьезны и по настоящее время еще не могутъ считаться окончательно исчерпанными, несмотря на то, что лучшіе математики міра трудились въ свое время надъ рѣшеніями вопросовъ, связанныхъ съ интегрированіемъ въ конечномъ видѣ (Hermite)—это послѣднее обстоятельство въ достаточной мѣрѣ позволяетъ составить себѣ представленіе о трудности вопроса. Дѣйствительно, надо было имѣть много вѣры въ свои силы, той вѣры, которая дается сознаніемъ своихъ истинныхъ математическихъ дарованій, чтобы при началѣ своей научной карьеры заняться столь труднымъ вопросомъ и добиться хотя бы частичнаго его разрѣшенія; въ данномъ случаѣ Иванъ Петровичъ поступилъ, слѣдуя очевидно примѣру безсмертнаго норвежскаго математика Абеля (котораго онъ, кстати сказать, боготворилъ), того математика, про котораго современники справедливо говорили: Абель не боялся ни одной задачи.

Не ограничившись установленіемъ того признака, о которомъ рѣчь шла выше, Иванъ Петровичъ въ цѣломъ рядѣ работъ (*Bulletin des Sciences Mathemath.*) далъ множество частныхъ примѣровъ псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, а о томъ, насколько это было не легко, можно судить по тому, что другіе примѣры были въ свое время даны математиками такого калибра, какъ Hermite, Goursat, Raffy и др.; каждый изъ такихъ примѣровъ есть научный фактъ; установленіе его требовало особыхъ усилій и представляетъ поэтому цѣнное научное приобрѣтеніе, а тѣмъ любителямъ легкихъ обобщеній, которые позволяли-бы себѣ слишкомъ легко отнестись къ подобному накопленію научныхъ фактовъ въ духѣ математики реальныхъ результатовъ, математики въ духѣ Абеля и Якоби,—тѣмъ не мѣшаетъ вспомнить слова Halphen'a, которые такъ любилъ повторять покойный: „je n'aime pas“, disait-il, „les généralisations faciles, qui encombrement la science“.

Свои идеи о приводимости псевдо-эллиптическихъ интеграловъ Иванъ Петровичъ обобщилъ, и въ этой безграничной области вопроса о такъ назыв. приведеніи абелевыхъ интеграловъ получилъ рядъ весьма цѣнныхъ результатовъ, установивъ попутно въ своей диссертации новую классификацію абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ двучленныхъ алгебраическихъ уравненій. Развитие этихъ идей находится въ прямой зависимости съ данной имъ за послѣдніе годы въ *Bulletin des Sciences Math.* теоріи преобразованія эллиптическихъ функцій съ новой точки зрѣнія (тамъ же попутно установлены извѣстныя формулы Kierpert'a); несмотря на весь ея интересъ, мы должны отказаться отъ мысли изложить сущность этой работы, ибо это завлекло-бы насъ слишкомъ далеко; къ тому же въ концѣ очерка приведенъ списокъ работъ покойнаго профессора вмѣстѣ съ краткими о нихъ рецензіями; въ предъидущемъ-же мы позволили себѣ войти въ нѣкоторыя спеціальныя подробности съ цѣлью уясненія того мѣста, которое занимаютъ въ наукѣ темы, разрабатывавшіяся Иваномъ Петровичемъ.

Кромѣ этихъ основныхъ для оцѣнки научной дѣятельности покойнаго, ему принадлежитъ рядъ статей относительно критерія Galois разрѣшимости уравненій въ радикалахъ, относительно формы корней алгебраическаго уравненія первоначальной

степени разрѣшаемаго въ радикалахъ, гдѣ имъ въ болѣе простой формѣ полученъ результатъ ранѣе извѣстный Kronecker'у; много занимался покойный ученый также вопросами изложенія различныхъ отдѣловъ анализа: статьи, помѣщенные въ „Извѣстіяхъ Горнаго Института“ и въ „Извѣс. С.-Петербур. Біологической Лабораторіи“ наглядно свидѣтельствуютъ объ этомъ. Кромѣ того, въ одной изъ своихъ работъ (Изв. Петер. Б. Лаборат.) Иванъ Петровичъ затронулъ весьма интересный и трудный вопросъ о томъ, когда именно уравненіе 6-ой степени разрѣσιμο въ радикалахъ и когда въ эллипт. функціяхъ; работа эта, въ которой между прочимъ элементарнымъ путемъ установлена теорема о томъ, что въ выраженіи радикальнаго рѣшенія урав. 6-ой степени не входитъ другихъ радикаловъ, кромѣ квадратныхъ и кубическихъ, работа эта, къ сожалѣнію, осталась неоконченной.

Всѣ только что перечисленныя работы, несмотря на весь ихъ интересъ, значительно уступаютъ (по оцѣнкѣ самого же покойнаго) работамъ первой категоріи, касающимся вопросовъ о приведеніи интеграловъ; этимъ послѣднимъ работамъ посвященъ расцвѣтъ научной дѣятельности покойнаго и онѣ создали ему, какъ совершенно справедливо выразился одинъ изъ его товарищей, имя среди русскихъ ученыхъ, извѣстныхъ за границей.

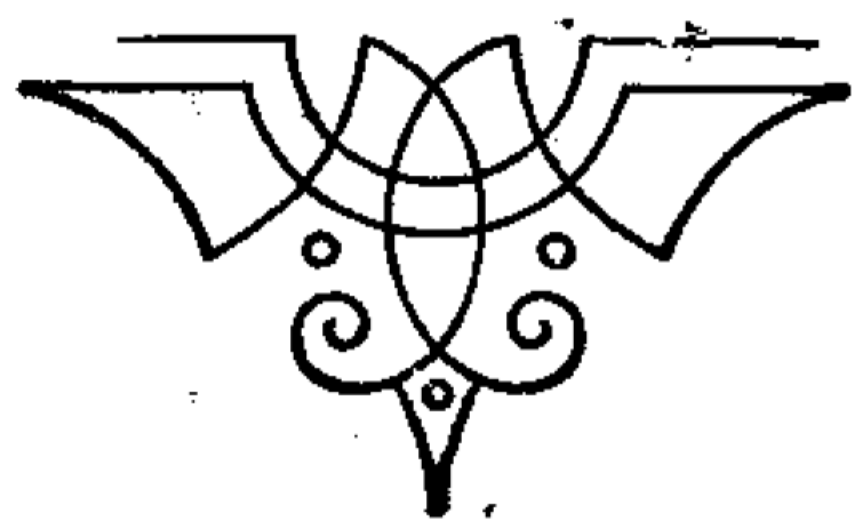
Здѣсь умѣстно будетъ замѣтить, что извѣстность математика, какъ вообще и всякаго отвлеченнаго мыслителя, существенно отличается отъ таковой же лицъ, работающихъ въ другой отрасли человѣческой дѣятельности, и какъ бы ни казалось парадоксальнымъ такое утвержденіе на первый взглядъ, но можно до нѣкоторой степени сказать, что иногда истинная извѣстность ученаго, его эквивалентъ, находится въ обратной зависимости съ числомъ лицъ, имѣющихъ о ней болѣе или менѣе наглядное представленіе. Это замѣчаніе, по моему мнѣнію, никогда не слѣдуетъ терять изъ виду, при оцѣнкѣ научной дѣятельности Ивана Петровича, въ лицѣ котораго Горный Институтъ безспорно потерялъ выдающагося профессора и математическій міръ—талантливаго ученаго.

Недостатокъ матеріальныхъ средствъ и тяжелая, я бы позволилъ себѣ сказать каторжная, педагогическая работа при 36-ти часовыхъ урокахъ въ недѣлю задержала своевременное и правильное развитіе математическаго таланта покойнаго, но не смогли заглушить его и нельзя не удивляться невѣроятной силѣ воли, и энергіи педагога, находившаго возможность заниматься при такихъ условіяхъ.

Особо неблагоприятныя внѣшнія обстоятельства были на его жизненномъ пути, но у него было и то, что позволяло ему одерживать надъ ними побѣду—это истинная, глубокая страсть къ наукѣ,—для него, говоря словами поэта: *la Science était vivante*,—она давала ему силы въ трудныя, тяжелыя минуты жизни; она же позволяла и можетъ быть болѣе того,—давала ему право во время пережитыхъ горестныхъ событій поступать такъ, какъ онъ считалъ нужнымъ и необходимымъ.

Окидывая мысленнымъ взоромъ научную дѣятельность безвременно-погибшаго ученаго, дѣятельность, направленную къ одной и той же цѣли, мы не можемъ въ

заключеніе не привести словъ одного французскаго математика, въ краткихъ, но сильныхъ выраженіяхъ характеризующихъ направленіе дѣятельности такихъ ученыхъ, къ числу которыхъ безспорно принадлежалъ нашъ дорогой и высокочтимый профессоръ: „on croirait voir, disait-il, un ingénieur savant, attaquant une place très forte; à travers les complexités des travaux d'approche, à travers les longues péripéties du siège, l'unité de sa pensée persiste et reste toujours visible“.



Памяти И. П. Долбни.

(Рѣчь, сказанная 8-го Апрѣля 1912 года въ засѣданіи Совѣта Горнаго Института Императрицы Екатерины II Профессоромъ **А. В. Васильевымъ**).

На скорбномъ засѣданіи, посвященномъ памяти высокоуважаемаго Ивана Петровича Долбни, не можетъ не раздаться голосъ Казанскаго Физико-Математическаго Общества, дѣятельнымъ членомъ котораго былъ одно время покойный, и, какъ бывший Предсѣдатель этого Общества, я приношу глубокую благодарность Совѣту Горнаго Института за доставленную мнѣ возможность сказать сегодня нѣсколько словъ.

Въ Трудахъ Казанскаго Физико - Математическаго Общества, существовавшего сначала подъ названіемъ: Секціи Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ, помѣщена была въ 1886 году первая серьезная ученая работа Ивана Петровича: „Новое доказательство теоремы Абеля, относящейся до интегрированія алгебраическихъ ирраціональных дифференціаловъ въ логариѣмахъ“ и вслѣдъ за этимъ, тамъ же былъ напечатанъ рядъ работъ, посвященныхъ отчасти высшей алгебрѣ (о критеріяхъ Галуа), отчасти — теоріи псевдо-эллиптическихъ интеграловъ, т. е. тѣмъ областямъ, къ которымъ относились и дальнѣйшія работы дорогаго намъ математика. Первые работы, какъ и большинство другихъ работъ И. П. Долбни, явились результатомъ серьезнаго изученія, съ одной стороны, мемуаровъ Абеля и Галуа, этихъ двухъ геніальныхъ безвременно погибшихъ математиковъ, къ памяти которыхъ Иванъ Петровичъ чувствовалъ благоговѣйное уваженіе, съ другой стороны — классическаго сочиненія Гальфена по теоріи эллиптическихъ функцій.

Милостивые Государи. На звѣздномъ небѣ математической науки блещутъ звѣзды различной величины и сверкаютъ отливками разнообразныхъ цвѣтовъ. И звѣзды первой величины свѣтятъ не однимъ цвѣтомъ; характеръ ихъ дѣятельности различенъ. Одни (какъ на примѣръ, нашъ Лобачевскій, Г. Канторъ), избираютъ ограниченную область математической науки, но напряженіемъ геніальной мысли производятъ въ этой области переворотъ, начинаютъ новую эпоху, создаютъ часто новую науку, Неэвклидову геометрію или теорію множествъ. Другіе (какъ на примѣръ, Эйлеръ, Коши или Пуанкаре), разрабатываютъ разнообразныя области математическаго знанія и въ

каждую область своего изслѣдованія вносятъ новыя геніальныя идеи, часто являющіяся результатомъ открываемыхъ ими аналогій между вопросами, не имѣющими ничего общаго для математика менѣе талантливаго и менѣе знающаго. Приведу въ примѣръ Пуанкаре, примѣняющаго геометрію Лобачевского къ интегрированію дифференціальныхъ линейныхъ уравненій 2-го порядка или Минковского, вносящаго геометрическія изслѣдованія въ теорію труднѣйшихъ вопросовъ теоріи чиселъ.

Тоже самое различіе въ характерѣ работы представляютъ намъ и тѣ ученые, которыхъ можно назвать звѣздами второй и слѣдующихъ величинъ. Одни ученые, благодаря обширнымъ знаніямъ въ разнообразныхъ областяхъ науки, находятъ новые результаты въ одной области, перенося въ нее методы и идеи, почерпнутыя изъ другой. Другіе избираютъ извѣстную, болѣе или менѣе узкую, область математической науки, но, благодаря постоянной работѣ и настойчивому изученію, становятся въ ней глубокими знатоками и обогащаютъ эту область знанія новыми цѣнными результатами. Къ нимъ примѣнима французская пословица: „mon verre n'est pas grand, mais je bois dans mon verre“.

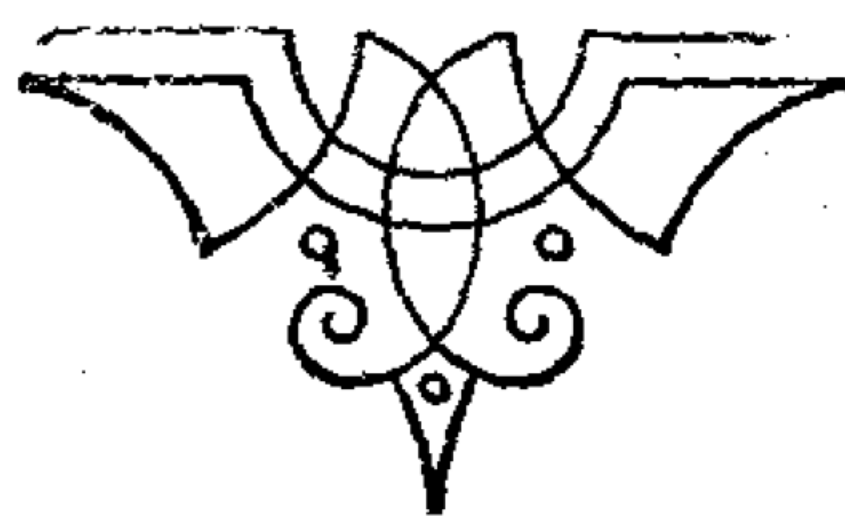
Къ числу ученыхъ этой второй категоріи принадлежалъ и покойный Иванъ Петровичъ Долбня. Его работы въ теченіе всей жизни, относились къ тѣмъ же двумъ областямъ, къ которымъ относились и первыя работы, напечатанныя въ изданіи Казанскаго Физико-Математическаго Общества—къ высшей алгебрѣ и въ особенности къ теоріи псевдо-эллиптическихъ интеграловъ. Благодаря настойчивому изученію этихъ областей, И. П. Долбня далъ наукѣ много цѣнныхъ результатовъ, много новыхъ аналитическихъ фактовъ.

Часто думаютъ, что великія математическія теоріи, подобно геніальнымъ произведеніямъ поэта, являются сразу, какъ вооруженная Паллада. Но исторія математической науки опровергаетъ это мнѣніе. Такъ, теорія преобразованія эллиптическихъ функцій, созданная Абелемъ и Якоби, интересовавшая покойнаго Ивана Петровича, была подготовлена работами предшествовавшихъ ученыхъ: Фаньяно, Ландека, Лежандра, изучившихъ частные случаи, подготовившихъ тотъ матеріалъ, безъ котораго невозможно было бы созданіе общей теоріи. Такъ и найденные Иваномъ Петровичемъ аналитическіе факты, несомнѣнно въ свое время послужатъ цѣнными камнями при постройкѣ общей теоріи псевдо-эллиптическихъ интеграловъ.

Области, въ которыхъ работалъ покойный—высшая алгебра буквенныхъ уравненій, теорія Абелевыхъ интеграловъ,—принадлежатъ къ наиболѣе отвлеченнымъ отдѣламъ частой математики, не находящимъ примѣненія въ изученіи окружающаго насъ міра явленій. Тотъ фактъ, что покойный избралъ для изученія и работы именно эти абстрактныя и трудныя области, соотвѣтствовалъ его гордому и безкорыстному характеру, который мы, всѣ знавшіе покойнаго, такъ цѣнили. Работая въ этихъ областяхъ, покойный чувствовалъ себя выше „profanum vulgus“ и показывалъ, что для него наука—не „млекодающая корова“, но—„чудная небесная богиня“. Но то, что Горный Институтъ избралъ Профессоромъ чистой Математики ученаго, работавшаго надъ абстрактными и чуждыми примѣненія къ задачамъ Института вопросами, служить

неоспоримымъ свидѣтельствомъ того, что русская научная техника цѣнитъ значеніе наиболѣе отвлеченныхъ областей математическаго знанія. Не время теперь останавливаться на вопросѣ о взаимодѣйствіи отвлеченной науки и техники. Если, съ одной стороны, чисто техническая задача—получить наивозможно большую работу отъ паровой машины—привела Сади Карно къ результату, который послужилъ исходнымъ пунктомъ въ ученіи о ходѣ всѣхъ міровыхъ процессовъ, будетъ ли это—охлажденіе, электрическій разрядъ, или жизнь и прогрессъ человѣчества, то съ другой стороны, безъ изслѣдованій въ области уравненій съ частными производными—этой труднѣйшей области математическаго анализа, невозможно было бы изобразить аналитическими символами пертурбаціи электромагнитнаго поля, подчинить количественному изученію электромагнитныя волны, которымъ, какъ показываютъ послѣднія работы Леви и Леймбаха, предстоитъ быть могучимъ орудіемъ для изслѣдованія внутренности земли для горнаго дѣла, для нахожденія подъ палящими песками пустынь Сахары и Гоби—бѣлаго угля. Широко и глубоко поставленное техническое образованіе можетъ и должно идти въ тѣсной связи съ отвлеченнымъ математическимъ знаніемъ, и лучшимъ доказательствомъ этого служитъ то, что ученый, посвящавшій свой талантъ и настойчивую любовь къ знанію отвлеченнымъ математическимъ доктринамъ, былъ прекраснымъ руководителемъ математическаго образованія въ Горномъ Институтѣ, память котораго такъ дорога и Институту и многочисленнымъ ученикамъ покойнаго, создающимъ и развивающимъ могучій источникъ богатства родины—горное дѣло.

А. Васильевъ.



Отрывки воспоминаній объ И. П. Долбнѣ.

Е. Е. Семашкевича.

„Учитель въ классѣ, это—фельдмаршалъ“.

Слова И. П. Долбни.

Съ особеннымъ удовольствіемъ исполняю желаніе Совѣта Горнаго Института, переданное мнѣ Е. С. Федоровымъ—подѣлиться моими воспоминаніями о И. П. Долбнѣ. Но, къ сожалѣнію, эти воспоминанія очень непродолжительны. Я зналъ покойнаго, хотя и хорошо, всего три года, въ бытность свою воспитателемъ Нижегородскаго Графа Аракчеева Кадетскаго корпуса. Затѣмъ, служебныя обязанности, постоянно отрывающія меня отъ письменнаго стола, не позволяютъ углубиться въ минувшее и изложить все съ надлежащей полнотой.

Мало сказать, что И. П. былъ талантливый, искусный преподаватель, добивавшійся поразительныхъ результатовъ, онъ былъ исключительный преподаватель, преподаватель-художникъ, владѣвшій въ совершенствѣ тайнами своего искусства. Въ глазахъ большинства школьниковъ всѣхъ видовъ математика пріобрѣла совершенно незаслуженную репутацію скучной, сухой науки. Уроки И. П. были блестящимъ опроверженіемъ этого предубѣжденія. Онъ не только умѣлъ возбудить у кадетъ живой захватывающій интересъ къ математикѣ, но ему удавалось пробудить любовь къ ней даже у непримиримыхъ враговъ этой „царственной“ науки.

Уроковъ его ждали, какъ особеннаго удовольствія, и не только не радовались, но серьезно огорчались, когда И. П., вслѣдствіе болѣзни (что случалось очень рѣдко) не могъ быть въ корпусѣ. И. П., прежде всего, обладалъ удивительнымъ даромъ точнаго, краткаго и яснаго изложенія; того же требовалъ и отъ кадетъ, пріучая ихъ къ математическому языку. Его пламенное увлеченіе, съ которымъ онъ раскрывалъ математическія истины, заражало всѣхъ: не было скучающихъ, зѣвающихъ, поминутно посматривающихъ на часы. Передъ слушателями былъ не только хорошій учитель, но вдохновенный поэтъ-математикъ, весь охваченный родной стихіей. Вставки, блестящаго остроумія, внося струю оживленія, поддерживали общее вниманіе. Онъ былъ

строгий, требовательный преподаватель, не создававший себѣ дешевой популярности цѣною разныхъ поблажекъ; вмѣстѣ съ тѣмъ, онъ стоялъ къ кадетамъ очень близко, относясь къ нимъ съ трогательнымъ вниманіемъ и сердечностью. Къ злостнымъ лентяямъ, маменькинымъ сынкамъ, поглощеннымъ всецѣло развлеченіями и беззаботнымъ къ своимъ занятіямъ,—онъ былъ безпощаденъ.

Старшіе кадеты иногда заходили къ И. П-чу на квартиру; за стаканомъ чая онъ, вызванный кадетами, рассказывалъ имъ о своей поучительной жизни, полной напряженного труда, лишеній, превратностей: сынъ кантониста, онъ, по окончаніи гимназіи, поступилъ въ горный институтъ, который окончилъ, заработавъ стипендію. Въ своихъ бесѣдахъ онъ постоянно говорилъ о любимой математикѣ, о необходимости трудиться надъ дальнѣйшимъ образованіемъ. И глубоко западали въ молодую душу слова любимого учителя. Отношеніе его къ кадетамъ было отеческое, съ отгѣнкомъ шутливости. Онъ каждому кадету, безразлично къ его возрасту, говорилъ „ты“, называлъ ихъ по именамъ, присоединяя къ нимъ прозвища: Чичиковъ, мистеръ Пиквикъ, Ваня съ большими бачками и т. п... Кадетамъ очень нравилась эта простота отношеній, она нисколько не ослабляла школьной дисциплины; скорѣе—наоборотъ.

Какъ сильный человекъ, И. П. могъ своей властной рукой повернуть классъ куда-угодно: взрывъ смѣха, по одному его жесту, смѣнялся глубокимъ молчаніемъ. Онъ не любилъ жаловаться на кадетъ, никогда не записывалъ кадетъ въ журналъ, предпочитая самому съ ними раздѣлаться. Если же воспитатель предлагалъ наказать виновнаго за дурной баллъ, или замѣченную шалость, И. П. это отклонялъ, говоря: „я его самъ по-отечески *выстыку*“. И, дѣйствительно, больно *стыкъ* моральными розгами, смоченными въ ѣдкомъ разсолѣ его колкаго остроумія; каждый охотно предпочиталъ карцеръ, или лишеніе отпуска этой педагогической расправѣ, которая долго не забывалась.

Послѣ дружной напряженной работы требовалась передышка. До конца урока оставалось полторы, двѣ минуты, И. П. доволенъ своими „мальчишками“, веселъ, улыбается и, обходя парты, предлагаетъ кадетамъ содовая лепешки, которыми онъ лечилъ свой застарѣлый катарръ—наслѣдіе полуголодныхъ дней юношества.

— Иванъ Петровичъ, позвольте посидѣть на пяткахъ, позвольте, позвольте!

И. П. благодушно разрѣшалъ. Сидѣть на пяткахъ—значило, что урокъ конченъ и начался „вольный разговоръ“ о литературѣ, корпусныхъ событіяхъ и пр.

Страстно любя математику и настойчиво занимаясь ею, И. П. не былъ узкимъ спеціалистомъ, которому чужды и другія науки и запросы жизни. Онъ, занятый научными работами, откликался на все: его интересовала литература русская и иностранная, исторія и общественныя науки. Диккенсъ, Маколей, Салтыковъ были его любимыми писателями. Обладая удивительной памятью, онъ могъ наизусть произносить цѣлыя страницы. Онъ былъ прирожденный ораторъ, но скромное поприще педагога не давало ему возможности развернуть во всю свой недюженный талантъ. Однообразный учительскій трудъ его угнеталъ и связывалъ ему крылья; извѣстный своими математическими работами, напечатанными въ парижскихъ спеціальныхъ журналахъ, онъ

искалъ другой аудиторіи: классъ кадетскаго корпуса ему былъ тѣсенъ. Окончаніе курса въ технической высшей школѣ препятствовало ему получить ученую степень и каѳедру. Это его раздражало. Онъ дѣлался желчнымъ, несдержаннымъ... Наконецъ, послѣ долгихъ ожиданій, онъ былъ приглашенъ въ Горный Институтъ на должность профессора математики. Это было большимъ торжествомъ и гордостью не только для него, но и для всего военно-учебнаго вѣдомства, которому онъ отдалъ лучшіе годы.

Онъ высоко ставилъ званіе учителя (именно *учителя*, а не преподавателя—этого слова онъ не любилъ).

„Учитель въ классѣ—это фельдмаршалъ, главнокомандующій на полѣ битвы“, любилъ онъ повторять это сравненіе.

Приводя его слова, можно смѣло сказать, что онъ самъ былъ *учителемъ-главнокомандующимъ*. Онъ крѣпко держалъ въ желѣзныхъ рукахъ весь классъ; всѣ подчинялись его подавляющему авторитету, всѣ съ какимъ-то умиленіемъ преклонялись передъ мощью его рѣдкаго ума.

Въ классахъ у него была та идеальная дисциплина, которая поддерживается не „инструкціями“ и „правилами“, не страхомъ наказанія, а всецѣло создается самимъ учителемъ, его личнымъ авторитетомъ, его собственными усиліями и тактомъ, не ищущими постоянной помощи извнѣ. И человѣкъ, и педагогъ онъ былъ смѣлый, отважный, рѣшительный, не любившій компромиссовъ, не умѣвшій лавировать. Онъ шелъ на-проломъ и имѣлъ много столкновеній...

Тяжелая жизнь не могла не наложить на И. П. своего жесткаго отпечатка: онъ былъ вспыльчивъ, рѣзокъ, желчно-раздражителенъ въ своихъ сужденіяхъ; но подъ оболочкой строгости и даже искусственной суровости скрывалось мягкое, доброе сердце, отзывавшееся на всякое горе всякаго человѣка, будь то сослуживецъ, или кадетъ, огорченный своими школьными неудачами.

Чуткая молодежь, ищущая повсюду ласки, опоры, шла къ своему учителю, какъ къ источнику свѣта и тепла.

И. П. былъ чрезвычайно яркой, самобытной и богато одаренной натурой. Въ бѣглыхъ и блѣдныхъ штрихахъ нѣтъ возможности обрисовать его. Но я буду радъ, если мои отрывочныя воспоминанія дадутъ хоть нѣкоторый матеріалъ для біографіи этого замѣчательнаго педагога и ученаго.



И. П. Долбня.

(Жизнь, возрѣнія, личность).

Н. Н. Яковлева.

Сильный и яркій образъ Ив. Петр. стоитъ у всѣхъ насъ еще передъ глазами; до сихъ поръ трудно еще примириться съ горечью, что это только образъ, что самого Ив. Петр. не стало.

И. П. скончался 2 февраля 1912 г., пятидесяти девяти лѣтъ отъ роду, родившись 31 января 1853.

Приблизительно въ 1867 г. 14-ти лѣтъ отъ роду, онъ окончилъ курсъ гимназіи въ Пинскѣ и затѣмъ нѣсколько лѣтъ прослужилъ волостнымъ писаремъ; юридически значился писаремъ его отецъ, фактически писаремъ былъ онъ, хотя не могъ получить этого мѣста официально по малолѣтству.

Въ 1870 г. Ив. Петр. поступилъ въ Горный Институтъ, выдержавъ пріемные экзамены на круглое 5 и получивъ, какъ первый въ списокъ, единственную стипендію, дававшуюся вновь поступающимъ. По окончаніи курса въ Горномъ Институтѣ въ 1875 г., И. П. поступилъ на педагогическіе курсы при 2-й Петербургской военной гимназіи. Съ 1877 по 1880 годъ служилъ преподавателемъ математики въ оренбургской военной гимназіи и затѣмъ до 1897 г. въ нижегородскомъ кадетскомъ корпусѣ. Въ 1897 г. Иванъ Петровичъ занялъ кафедру высшей математики въ Горномъ Институтѣ, послѣ защиты диссертациі „Изслѣдованіе по теоріи абелевыхъ интеграловъ“. Въ 1904 году былъ согласно прошенія уволенъ отъ службы въ Горномъ Институтѣ, а въ 1906 г. снова занялъ должность ординарнаго профессора института. Въ 1910 г., согласно избранія совѣта Горнаго Института, былъ назначенъ исп. обязанности директора Института, а въ 1911 г. утвержденъ въ должности директора. Скончался послѣ операціи міоматической опухоли мочевого пузыря.

Даже изъ этого краткаго и сухого перечня главнѣйшихъ событій жизни И. П. видно, что покойнымъ былъ пройденъ тяжелый жизненный путь. Достигнутыми въ жизни успѣхами И. П. былъ обязанъ лишь самому себѣ, своимъ выдающимся способностямъ, труду и энергіи.

По сообщенію знавшаго его въ гимназіи П. Л. Мальчевскаго учился И. П. хорошо и уже тогда отличался въ математикѣ. „Помню (пишетъ г. Мальчевскій) какъ впервые мнѣ указали товарищи на И. П. — „смотри, это Долбня—первый математикъ на всю гимназію“. „Надо сказать“, продолжаетъ П. Л. Мальчевскій, „что въ низшихъ классахъ гимназіи былъ прекрасный учитель ариметики и алгебры Малишевскій, а въ старшихъ классахъ — рѣдкій по таланту преподаватель С. М. Самусь, который училъ не признавая никакихъ учебниковъ алгебры и тригонометріи; съ учебниками этими мы впервые познакомились по окончаніи гимназіи. Самусь говорилъ — „вотъ если Долбня захочетъ—изъ него толкъ большой будетъ“.

Жилъ И. П. въ Пинскѣ, какъ говоритъ П. Л. Мальчевскій, въ сторожкѣ при шляузѣ, при которомъ отецъ его состоялъ въ качествѣ „унтеръ-офицера“. Шлюзъ былъ на краю города.

„Первая моя встрѣча съ И. П. (говоритъ П. Л. Мальчевскій, не бывшій одно-классникомъ И. П.), первая длительная бесѣда памятна мнѣ очень—это было во время моихъ выпускныхъ экзаменовъ въ гимназіи, въ 1869 г. Несмотря на горячее время я съ наслажденіемъ просидѣлъ съ И. П. и еще однимъ тоже уже не гимназистомъ часовъ пять въ разговорѣ относительно вопроса о происхожденіи видовъ“.

Начало службы Ив. П. въ Горномъ Институтѣ совпало съ началомъ эпохи, богатой студенческими безпорядками. Съ 1898 г. и до 1905 г, высшія учебныя заведенія Имперіи были ареной студенческихъ волненій въ такой мѣрѣ, въ какой не были за цѣлый рядъ десятилѣтій. Въ общемъ ходъ этихъ волненій протекалъ такимъ образомъ, что по тому или другому политическому поводу учащаяся молодежь устраивала манифестацію, обыкновенно направляясь шествіемъ на Казанскую площадь, полиція стремилась разсѣять манифестантовъ, при чемъ не обходилось безъ побоевъ, а иногда происходило и настоящее избіеніе молодежи. Учащаяся молодежь тогда объявляла забастовку, а высшее начальство требовало отъ совѣтовъ найти виновниковъ забастовки.

Въ ту эпоху, когда и зрѣлымъ людямъ не дозволялось имѣть сужденія о политикѣ, политическія выступленія студенчества были естественны. Съ одной стороны въ виду этого, съ другой стороны въ виду иногда возмущавшихъ общество полицейскихъ расправъ, совѣты высшихъ учебныхъ заведеній сочувствовали студентамъ, не проявляли охоты къ репрессіямъ противъ молодежи по требованію начальства, иногда, какъ во времена Ванновскаго, указывали на необходимость разслѣдованія полицейскихъ расправъ для успокоенія молодежи. Въ частности, что касается Горнаго Института въ эту пору, И. П. принималъ дѣятельное участіе въ отпискахъ начальству, много записокъ, вышедшихъ изъ Совѣта Горнаго Института принадлежали его перу, онъ былъ приглашаемъ и въ комиссію Ванновскаго для разслѣдованія причинъ студенческихъ волненій, былъ приглашаемъ къ себѣ Ванновскимъ и послѣ этого. Наконецъ въ 1904 г. во время извѣстныхъ событій въ Горномъ Институтѣ, между прочимъ имѣвшихъ послѣдствіемъ выходъ въ отставку группы профессоровъ, И. П. явился какъ бы руководителемъ этой группы; въ дѣйствительности инициатива принадлежала большею частью болѣе молодымъ членамъ этой группы, но при выступленіяхъ И. П. естественно вы-

двигался впередъ, если и не по своему желанію, то по іерархіи, по лѣтамъ, авторитету. Въ эту пору онъ всегда считалъ долгомъ остерегать своихъ болѣе молодыхъ сотоварищей, указывая, что считаетъ это необходимымъ дѣлать потому, что съ выходомъ въ отставку, онъ, уже выслужившій профессорскую пенсію, могъ потерять значительно менѣе. Съ осени 1905 года, когда возникла Государственная Дума, надо считать положеніе значительно измѣнившимся. Съ тѣхъ поръ какъ обществу предоставлена возможность высказываться по вопросамъ внутренней политики, утрачивается былой смыслъ студенческихъ выступленій. Самая манера прибѣгать къ забастовкамъ въ случаяхъ какъ горестныхъ, такъ и радостныхъ (напр., празднованіе освобожденія крестьянъ до временъ Плеве) является мало съ чѣмъ сообразной. Разумѣется, есть люди, желающіе всегда, при всякихъ обстоятельствахъ прежде всего быть лѣвыми. Но есть и люди, считающіе, что въ періоды крупныхъ политическихъ реформъ нельзя идти безъ удержу влѣво и впередъ, что можно пріостановиться на достигнутомъ этапѣ. Къ числу такихъ людей принадлежалъ и покойный И. П. Пройдя суровую школу жизни и зная, что какъ въ личной, такъ и въ общественной жизни, результаты даются не легко и не сразу, онъ не могъ раздѣлять увлеченій лѣвыхъ партій и оказался стоящимъ направо, подобно напр. нѣкоторымъ другимъ извѣстнымъ профессорамъ и литераторамъ, ранѣе бывшимъ лѣвѣе. Такое положеніе И. П. было явленіемъ естественной эволюціи, было психологически необходимымъ результатомъ всей предшествовавшей жизни его, и выходки, которымъ онъ подвергался иногда, получая напр. анонимныя письма съ упреками въ измѣнѣ убѣжденіямъ, были совершенно несправедливы. Говорить объ измѣнѣ И. П. убѣжденіямъ было нельзя, можно было говорить лишь объ измѣненіи воззрѣній по нѣкоторымъ вопросамъ, именно по вопросамъ отношенія общества къ правительству, къ студенческимъ безпорядкамъ. Въ отношеніи женскаго вопроса, религіи и др. воззрѣнія Ив. П. всегда были одинаковы. Одно изъ лицъ, иногда упрекавшихъ И. П. при жизни за измѣну будто-бы убѣжденіямъ, тотчасъ-же послѣ смерти Ив. П. заявило: „теперь, когда онъ умеръ, нельзя не признать, что онъ всегда былъ вполне искрененъ“. Точно при жизни покойнаго была какая-то надобность не признавать этого!

Какъ извѣстно, знавшимъ И. П. Долбню лично покойный отличался своею способностью выражать свои мнѣнія въ формѣ афоризмовъ, способностью „крылатаго слова“, какъ заявилъ объ этомъ Булацель на процессѣ Пуришкевича со студентами Горнаго Института.

Вотъ на афоризмахъ то Ивана Петровича, отражающихъ въ себѣ его общественныя и политическія воззрѣнія, мы и остановимся.

Я долженъ оговориться, что то, что я буду говорить объ Иванѣ Петровичѣ, относится исключительно къ періоду приблизительно послѣднихъ 10-ти лѣтъ его жизни. Лишь въ этотъ періодъ я зналъ покойнаго. Афоризмы, которые я могу предложить Вашему вниманію таковы, что на основаніи ихъ однихъ люди, не знавшія Ив. Петр., могутъ счесть его за реакціонера, какимъ онъ, конечно, не былъ. Именно русская публика, обыкновенно не дѣлающая различенія между реакціонерами и консерваторами,

детъ склонна аттестовать И. П. реакціонеромъ. Я полагаю, что если надо квалифицировать И. П., то его можно назвать консерваторомъ и въ то же время прогрессивомъ. Его консерватизмъ далеко не исключалъ движенія впередъ. Въ послѣднее сятилѣтіе жизни И. П. консервативная сторона его воззрѣнія получала у него выженье болѣе яркое, чѣмъ прогрессивная. Можетъ быть это было потому, что въ преживаемое нами время, пріобщенія къ политикѣ болѣе широкихъ круговъ населенія, чѣмъ было въ недавнемъ прошломъ, приходится рѣзко опредѣлять преобладающіе элементы своего міровоззрѣнія, тѣмъ болѣе для человѣка горячаго, нервознаго, можетъ быть и съ больнымъ сердцемъ.

Афоризмы И. П. остроумны и въ основѣ ихъ часто вѣрная и глубокая мысль. Поворотъ вправо у И. П. произошелъ, какъ только обозначилась перспектива возникновенія конституціи.

За нѣсколько дней до 17 октября 1905 г. И. П. былъ на митингъ въ Технологическомъ Институтѣ, гдѣ, какъ это было обычнымъ дѣломъ въ то время, раздались призывы къ вооруженному возстанію.

„Революція бьетъ неудержимымъ потокомъ, стремится на улицу черезъ окна и зери, черезъ всѣ щели. Берите ножи, берите кинжалы, топоры и револьверы и идите съ ними на улицу“! приглашалъ одинъ ораторъ. „Да это сумашедшій“! воскликнулъ бращаясь къ окружающимъ Ив. Петр., на что получилъ отъ одного изъ сосѣдей эплику: „Ну, ну, потише, да Вы не монархистъ ли“?! „А вамъ какое дѣло? отвѣтилъ И. П. и ушелъ съ митинга.

Много негодовалъ въ это время И. П. по поводу извѣстій о красноярскихъ, читинскихъ, латышскихъ и т. п. республикахъ. На сообщеніе, въ радостномъ тонѣ, одного стараго профессора—радикала, что въ Москвѣ баррикады, онъ заявилъ: „сердце у меня оближется кровью при видѣ Вашего легкомыслія; если баррикады, то значить будутъ винуты войска и кромѣ разстрѣла ничего не выйдетъ“.

На первомъ же послѣ 17 октября общемъ собраніи бывшаго Академическаго союза профессоровъ и преподавателей высшихъ учебныхъ заведеній, когда обсуждался вопросъ объ отношеніи союза къ вводимымъ реформамъ, И. П. выступилъ съ рѣчью, мѣвшей успѣхъ, съ приглашеніемъ оказать поддержку правительству графа Витте.

При выборахъ въ 1-ую Думу онъ еще былъ кандидатомъ партіи кадетовъ, но вѣнительно отступилъ отъ кадетъ, между прочимъ рѣзко порицалъ ихъ за уклоненія въ выраженія порицанія террору слѣва. Съ тѣхъ поръ и до послѣдняго времени отношеніе его къ кадетамъ оставалось неизмѣнно отрицательнымъ. „Кадетизмъ—это натура“, между прочимъ говорилъ онъ; приписывая этой натурѣ свойства, выражающіяся въ ходячихъ обвиненіяхъ кадетъ въ неискренности, исканіи власти и популярности и т. п.

Онъ считалъ кадетизмъ настолько скомпрометированнымъ, что все соприкасающееся съ нимъ подвержено преслѣдованіямъ, и даже благія начинанія его въ корнѣ обречены на неудачу.

Относительно кадетъ, говорилъ И. П., можно сказать то же, что было сказано

Моисеемъ относительно Корея, Даана и Авирона: „отыдите отъ шатровъ нечестивыхъ сихъ и не прикасайтесь ни къ чему, что принадлежитъ имъ, дабы не погибнутъ Вамъ во всѣхъ грѣхахъ ихъ“.

И. П. пожалуй даже снисходительнѣе относился къ социалистическимъ партіямъ, не считая представителей ихъ въ массѣ неискренними, но лишь людьми съ ограниченнымъ разумѣніемъ, не понимающими, что они хотятъ невозможнаго. Соціализмъ и социалистовъ онъ характеризовалъ эпитетомъ „сумашедшій домъ“.

Бѣдные разсчитываютъ пріобрѣсти достатокъ, раздѣливъ имущества богатыхъ: говорилъ И. П., но ошибаются. Этимъ путемъ достатокъ не создается. Если-бъ шайка безмозглыхъ санкюлотовъ удалось растащить національное богатство по кусочку, оно было бы только уничтожено и не помогло бы милліонамъ неимущихъ, которые не умѣютъ хранить его. Каждый старался бы прежде всего набить свой карманъ.

Аристократъ ума, И. П. протестовалъ противъ всеобщаго избирательнаго права не признавая его, какъ онъ выражался, между прочимъ, за человѣкомъ, не умѣющимъ заработать себѣ на штаны.

Никогда улица государствомъ не управляла. Улица (подъ этимъ И. П. разумѣлъ и политикановъ, и газетныхъ писакъ, и модныхъ беллетристовъ и т. п.) не можетъ создать тѣхъ цѣнностей, которыя создаются на почвѣ высокаго культурнаго благополучія, защищеннаго фактической силой, защищенныхъ такъ, что ни у кого и мысли не можетъ возникнуть о посягательствахъ на нихъ.

Улица можетъ только разбить то, что создается вѣковыми усиліями и никогда не войдетъ въ интересы скрытой работы геніевъ въ области науки, управленія, завоеваній, накопленія богатствъ, и пр., никогда не пойметъ ихъ.

Для этой улицы, въ отвѣтъ на ея посягательства управлять государствомъ, говорилъ И. П., существуетъ только одинъ безспорный аргументъ:—артиллерійскій огонь!

Врагъ политики далеко идущихъ послабленій И. П. считалъ, что она опасно разнуздываетъ массы. Гибли не тѣ монархи, говорилъ онъ, которые были худшими, а тѣ, которые не оказывались способными проявить достаточно твердости въ надлежащіе моменты. Петръ I, стоявшій у колеса, которымъ колесовали стрѣльцовъ, являлся ему воплощеніемъ должной власти.

Для неимущаго и не могущаго найти работы въ настоящее время И. П. признавалъ одно право, — право милостыни, и самъ никогда не отказывалъ въ подаяніи просящему.

Онъ вспоминалъ иногда слова генералъ-адъютанта Даниловича: „если нищій попроситъ у меня хлѣба, то я дамъ ему хлѣба, но если онъ попроситъ котлетки, я ему отвѣчу, нѣтъ у меня котлетки, нѣтъ, нѣтъ, нѣтъ котлетки“...

И. П. протестовалъ противъ автономистскихъ стремленій окраинъ. „Имперію, созданіе ряда русскихъ государей, наслѣдіе Петра Великаго, дать растащить финляндцамъ, полякамъ, малороссамъ, армянамъ и пр.“! восклицалъ онъ. На замѣчаніе, что существуютъ же федераціи, напримѣръ, штатовъ Сѣв. Америки, онъ отвѣчалъ, что штаты Сѣв. Америки добровольно соединились въ государство, а наши окраины при-

соединены завоеваніемъ или находились на пути къ этому, при чемъ не можетъ быть рѣчи о федераціи и автономіи.

Вообще И. П. считалъ, что въ мірѣ слишкомъ много слабыхъ головъ, какъ онъ выражался, увлекающихся возможностью осуществленія въ жизни отвлеченныхъ формулъ, вродѣ всеобщаго избирательнаго права и пр.

И. П. довольно пренебрежительно относился къ стремленію женщинъ къ высшему образованію и равноправію съ мужчинами.

„Вѣдь вы все запакостите, вѣдь нѣтъ угла, гдѣ бы можно было Васъ не встрѣтить“! яростно набрасывался онъ, лечась въ Локарно и встрѣтивъ тамъ одну изъ своихъ слушательницъ по курсамъ Лесгафта. „Вонъ здѣсь m-lle N.“ прибавилъ онъ, продаетъ молочные продукты въ лавкѣ, довольна своей судьбой и всѣмъ пріятна“. Единственное объясненіе и оправданіе для женщинъ, ищущихъ высшаго образованія, И. П. находилъ въ томъ, что слишкомъ многія изъ нихъ остаются лишенными семьи, материнства и таковыя пользовались его горячимъ сочувствіемъ.

„Государственные люди, мыслители, великіе художники и педагоги, развѣ тутъ были женщины“? „Да наконецъ, кто былъ Спаситель міра“? Спрашивалъ И. П. и отвѣчалъ „Сынъ Божій“.

Вообще И. П. былъ не высокаго мнѣнія о русской интеллигенціи, считая ее мало на что годной и главнымъ образомъ на то, чтобы ругать правительство и вставлять палки въ колеса ему. Русскую интеллигенцію И. П. считалъ нахватавшеюся поверхностнаго образованія, беспочвенною.

„Слава Богу“, говорилъ онъ „нигдѣ въ Зап. Европѣ нѣтъ такой интеллигенціи“! Онъ несочувственно относился къ курсамъ, устраиваемымъ русской интеллигенціей для рабочихъ, считая, что эти курсы лишь отрываютъ рабочихъ отъ своей среды, превращая ихъ въ интеллигентовъ, подобныхъ самимъ учителямъ. „Очень ужъ мы хороши“, презрительно говорилъ онъ, „можно всякому пожелать стать тѣмъ же“!

Въ упрекъ русской интеллигенціи И. П. ставилъ между прочимъ то, что она очень легка на подъемъ по части покушенія на казенный сундукъ. Ругаютъ правительство тѣ же люди, что получаютъ казенное содержаніе. Когда по смерти Л. Н. Толстого возникъ вопросъ о покупкѣ правительствомъ Ясной Поляны и лѣвая печать иронически подмигивала и кивала по поводу выяснявшейся несклонности правительства къ этой покупкѣ, И. П. заявилъ, что правительство поступить правильно, не купивъ имѣнія за вздутую цѣну.

„Собрало польское общество десятки тысячъ рублей на покупку имѣнія Сенкевичу и шведское на даръ Стриндбергу, почему въ русскомъ обществѣ не возникаетъ и мысли о чемъ либо подобномъ“? спрашивалъ И. П.

Что касается религіи, И. П. едва ли могъ назваться вѣрующимъ, но отношеніе его къ вопросу о Богѣ было то, что высказано Фаустомъ Маргаритѣ на вопросъ ея о вѣрѣ. И. П. считалъ, что человѣчество слишкомъ многого не знаетъ и не можетъ знать въ этой области, чтобъ можно было быть здѣсь рѣшительно увѣреннымъ въ правотѣ своихъ воззрѣній. Начало міра, безконечность пространства, вопросы, которые и мате-

щеніе пробуждаетъ самосознаніе, а послѣднее ведетъ къ сознанію собственного достоинства. Послѣднее у него такой же краеугольный камень, какъ у христіанъ—братская любовь. Поступать по чувству собственного достоинства онъ считаетъ болѣе искреннимъ, чѣмъ по чувству любви къ ближнему. „Люби—принадлежитъ будущее, замѣчалъ онъ“.

Несомнѣнно у И. П. было развито сознаніе собственного достоинства, но онъ сознавалъ и свои недостатки и готовъ былъ къ открытому признанію ихъ; мнѣ пришлось быть разъ свидѣтелемъ, какъ онъ рѣзко и съ горечью говорилъ: „какъ уважать себя, когда чувствуешь въ себѣ много недостойнаго“.

И всѣ эти люди, съ которыми въ свей жизни соприкасался И. П., которыхъ любилъ и бранилъ, въ жизнь которыхъ съ участіемъ входилъ,—родственники, офицера, студенты и курсистки, профессора и сторожа, всѣ они по смерти его пришли, принесли къ его гробу вѣнки и дружной толпой проводили на мѣсто послѣдняго земного пристанища!

Надо было быть близорукимъ, или слишкомъ мало знать И. П., чтобы не видѣть его добродушія. Готовый въ спорѣ на рѣзкій отпоръ И. П., не былъ злопамятенъ; внѣ спора относился добродушно къ своимъ антагонистамъ и не отказывалъ въ признаніи достоинствъ у нихъ. Давъ по своему добродушію какое либо обѣщаніе, напр. при профессорскихъ выборахъ, онъ всегда держался даннаго слова, хотя иногда каялся тотчасъ послѣ того какъ давалъ его. Передъ Рождествомъ 1911 г. онъ испросилъ разрѣшеніе начальства на общую сходку студентовъ Горнаго Института, пообѣщавъ имъ это, хотя далеко не былъ убѣжденъ въ необходимости сходки. Доброта и связанная съ нею слабоватость характера были у И. П. источникомъ несоотвѣтствія его образа дѣйствій съ его воззрѣніями. Онъ самъ признавалъ это. Это тѣмъ болѣе бросалось въ глаза, что въ своихъ рѣчахъ покойный сплошь и рядомъ проявлялъ блестящую, стальную логику. У И. П., какъ пишетъ уже цитированный мною выше г. Панфиловъ, чувствовалась необычайная сила таланта и темперамента вождя. Въ должности профессора высшей математики эти качества мало могли проявляться, но все-таки И. П. принадлежала въ послѣдніе годы въ Горномъ Институтѣ, въ Совѣтѣ его и въ такъ называемомъ отдѣленіи Совѣта по студенческимъ дѣламъ, одно время существовавшемъ, руководящая роль.

Въ отношеніи упомянутаго отдѣленія Совѣта можно сказать, что сколько-нибудь приличное и благополучное существованіе его только и было возможно при И. П. Послѣ ухода И. П. изъ отдѣленія Совѣта оно было закрыто не только вслѣдствіе желанія высшаго начальства, но и потому, что замѣнить И. П. какъ сильнаго руководителя было тамъ нечѣмъ. При талантѣ И. П., поучительной школѣ жизни, пройденной имъ, и при общемъ образованіи, большемъ чѣмъ у средняго профессора, онъ несомнѣнно могъ бы быть напр. выдающимся и полезнымъ членомъ Государственной Думы.

Лѣтъ 15-и отъ роду, какъ указано выше, И. П. былъ способенъ и интересенъ въ пятичасовой бесѣдѣ на тему о происхожденіи видовъ, сослуживецъ по Нижегород-

родскому корпусу пишетъ, что его интересовали въ то время литература русская и иностранная, исторія и общественныя науки. Одинъ изъ учениковъ И. П. по Нижегородской гимназіи говоритъ, что своими бесѣдами съ учениками на темы по геологіи И. П. пробудилъ впервые въ немъ стремленіе къ изученію неорганической природы. Это разнообразіе интересовъ онъ сохранилъ до самой смерти.

Особенно онъ былъ начитанъ въ исторіи, такъ, что на одномъ изъ предвыборныхъ собраній въ Нарвской Части,—собраніе передъ 1-ой Думой, на которомъ И. П. былъ отвѣтственнымъ лицомъ,—одинъ изъ рабочихъ, обращаясь къ нему, называлъ его профессоромъ исторіи. Охотникъ поговорить И. П. обыкновенно заканчивалъ уроки въ кадетскомъ корпусѣ и лекціи въ Горномъ Институтѣ рѣчью на постороннюю математикѣ тему, но при дѣловомъ обсужденіи вопросовъ, напр. въ засѣданіи Совѣта, не любилъ многоглаголанія и засѣданія подъ его предсѣдательствомъ протекали быстро и содержательно. Цѣня выше всего дѣло, достиженіе полезныхъ результатовъ, Ив. П. большею частью былъ склоненъ идти на компромиссъ, находилъ его, когда это было трудно, или когда объ этомъ не заботились другіе. Бывали случаи, когда Ив. П. не довольствовался тѣмъ, что защищаемое имъ мнѣніе получало большинство голосовъ, хотя и слабое; онъ подыскивалъ тогда новую формулировку вопроса, новое постановленіе, которое объединило-бы значительное большинство.

Покойный былъ всегда далекъ отъ мысли объ административной карьерѣ. Ставъ директоромъ, онъ проявлялъ недальновидность въ отношеніи своей карьеры. Такъ еще будучи исполняющимъ обязанности директора (съ утвержденіемъ его директоромъ не торопились) осенью 1911 г. онъ напечаталъ въ „Новомъ Времени“ письмо относительно ошибочности обвиненія института въ пріемъ лицъ съ подложными аттестатами средней школы и указалъ, что это обвиненіе является результатомъ „чрезмѣрнаго прокурорскаго рвенія“ учебнаго отдѣла министерства.

Минувшей осенью, когда появился сборникъ „Памяти Лесгафта“, встрѣчаются двое знакомыхъ И. П. „Помилуйте!“ говоритъ одинъ другому „Что это такое дѣлаетъ Ив. П?“.

— „А что такое?“

— „Да въ воспоминаніяхъ о Лесгафтѣ рассказываетъ какъ онъ съ Лесгафтомъ ходили бунтовать профессоровъ по поводу избіенія студентовъ на Казанской площади. Развѣ приличны такія воспоминанія для директора высшаго учебнаго заведенія?“

Собственно эта страничка изъ воспоминаній была написана и дана Ив. П-емъ еще до того, какъ онъ сдѣлался директоромъ, но по выходѣ сборника ему и въ голову не пришла мысль, что печатать ее можетъ быть для него не ловко, онъ даже спрашивалъ, не правда-ли, что объ этомъ слѣдовало печатать скорѣе, чѣмъ кой о чемъ другомъ, приведеннымъ въ сборникѣ.

Какъ заявилъ одинъ изъ учениковъ И. П. по Горному Институту: „Долбня былъ намъ студентамъ, дорогъ и интересенъ, какъ оригинальная, яркая личность, со способностью во все внести анализъ, критику, независимо отъ того было ли это въ правомъ или лѣвомъ направленіи... Въ нашихъ глазахъ Долбня сообщалъ колоритъ и отпечатокъ

Горному Институту, которые, къ сожалѣнію, должны невозвратно утратиться со смертью И. П.

Сдѣлавшись директоромъ, И. П. не стремился извлечь изъ этого какія-либо особенныя выгоды для себя, раздѣлилъ директорскую квартиру на двѣ части и оставилъ себѣ худшую, не добивался напр. добавочныхъ ассигнованій на своихъ ассистентовъ.

И. П. былъ замѣчательно яркой, самобытной и богато одаренной натурой, говорить о немъ его сослуживецъ, ген. Семашкевичъ. Къ этому слѣдуетъ прибавить, что И. П. былъ добрый, честный, прямой, искренній человѣкъ. Понятно, что знавшіе его близко и прежде всего его ученики и слушательницы, не могли не любить его и охотно извиняли ему, если онъ въ своей горячности и прямотѣ задѣвалъ ихъ. Вѣчная память о немъ будетъ жить среди его учениковъ и товарищей; онъ можетъ служить примѣромъ добраго и внимательнаго сына, добраго брата, надежнаго друга, выдающагося ученаго въ труднѣйшей области человѣческаго мышленія, блестящаго профессора и педагога-директора.

Здѣсь, среди этихъ стѣнъ, началъ Ив. Петр. свою болѣе широкую самостоятельную дѣятельность, видную намъ всѣмъ; здѣсь-же онъ ее закончилъ.

Пусть-же въ этихъ стѣнахъ дольше всего и сохранится о немъ заслуженная добрая память!



Списокъ работъ профессора И. П. Долбни въ хронологическомъ порядкѣ ихъ появленія¹⁾.

1) Новое доказательство теоремъ Абеля, относящихся до интегрированія дифференціаловъ вида $\frac{pdx}{\sqrt{R}}$, гдѣ p и R цѣлыя функціи (сообщеніе, читанное въ 73 засѣданіи физ. мат. секціи Общества Естествоисп. при Казанскомъ Унив.). Эта, первая по времени самостоятельная работа покойнаго ученаго посвящена доказательству знаменитаго критерія Абеля:

„если интегралъ $\int \frac{pdx}{\sqrt{R}}$ выражается въ логарифмахъ въ видѣ $\log \frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}$ гдѣ p и q цѣлыя

функціи x , то $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь; и обратно, если $\sqrt{R}$ разлагается въ періодическую непрерывную дробь, то дифференціалъ $\frac{pdx}{\sqrt{R}}$ будетъ интегрироваться въ логарифмахъ“.

Въ своемъ изслѣдованіи авторъ, пользуясь свойствами непрерывной дроби, въ которую разлагается $\sqrt{R}$, устанавливаетъ такія двѣ леммы, вполне достаточныя для доказательства теоремы Абеля:

а) если въ разложеніи $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь одно изъ полныхъ частныхъ y_i будетъ корнемъ уравненія: $ay_i^2 + 2by_i + c = 0$, гдѣ $a = \pm (p_i^2 - q_i^2 R)^2 = \text{Const}$, то непрерывная дробь будетъ непремѣнно періодическая.

б) Если $\sqrt{R}$ обращается въ періодическую непрерывную дробь вида:

$$\sqrt{R} = d + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_i} + \frac{1}{y_i},$$

гдѣ $y_i = \frac{2a}{d} + \frac{1}{ad_1} + \dots$, и $a = \text{const}$, то въ урав-

¹⁾ Содержаніе работъ 1—16 изложено Н. М. Крыловымъ, а остальныхъ—М. И. Акимовымъ. Ср. также «Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik».

²⁾ гдѣ $\frac{pi}{qi}$ будетъ подходящая дробь.

неніи: $Ay_i^2 + By_i + C = 0$, опредѣляющемъ y_i , коэффициентъ A есть постоянная величина равная a .

Такая постановка вопроса позволяетъ избѣжать изученія неопредѣленнаго уравненія: $NP^2 - Q^2R_1 = \text{const}$, (гдѣ P и Q цѣлыя функціи), рѣшеніе котораго составляетъ главную трудность мемуара Абеля и мысль автора представляется тѣмъ болѣе естественной, что разъ критерій Абеля основывается на періодичности непрерывной дроби, въ которую разлагается $\sqrt{R}$, то и доказательство этого критерія должно быть основано на свойствахъ періодическ. дробей.

2) О критеріи Galois разрѣшимости алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ. (Казань, 1889).

Въ этомъ мемуарѣ авторъ устанавливаетъ связь между работами Абеля и Галуа по теоріи разрѣшенія алгебраическихъ уравненій первоначальной степени въ радикалахъ.

Исходя изъ формы радикальнаго рѣшенія, данной впервые Абелемъ (и доказанной лишь впоследствии Malmsten'омъ):

$$1) x_i = \frac{1}{n} \left[\alpha^i R_1^{\frac{1}{n}} + \alpha^{i-1} R_2^{\frac{1}{n}} + \dots + \alpha^{n-i} R_{n-1}^{\frac{1}{n}} \right]$$

(гдѣ $\alpha^n = 1$ и R_i корни урав. $(n-1)$ степени съ раціон. коэф.) авторъ доказываетъ знаменитый критерій Galois: „pour qu'une equation du degré premier soit resoluble par les radicaux il faut et il suffit: „deux des racines étant données, les autres s'en deduisent rationnellement“. Для этой цѣли предста-

вляя помощью формулъ (1) $R_i^{\frac{1}{n}}$ въ видѣ цѣлой раціональной функціи корней x_i (гдѣ $i = 0, 1 \dots n-1$),

авторъ изучаетъ вліяніе на $R_i^{\frac{1}{n}}$ подстановокъ $S = \begin{pmatrix} z+k \\ z \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} kz \\ z \end{pmatrix}$, что позволяетъ ему высказать такую теорему: подстановки, не измѣняя

ція функцій $R_i \frac{1}{n}$ образують групу порядка равнаго $(n-2)!$ и состоящую изъ всевозможныхъ подстановокъ, не измѣняющихъ 2 корней: x_0 и еще нѣкотораго корня x_k ; отсюда

ясно, что каждая изъ функцій вида $\alpha^k R_i \frac{1}{n}$ можетъ быть выражена рационально въ 2 корняхъ уравненія надлежащимъ образомъ выбранныхъ. Пользуясь затѣмъ извѣстнымъ разсужденіемъ Galois, авторъ доказываетъ, что каждый изъ корней даннаго уравненія выражается рационально черезъ каждую

изъ функцій $\alpha^k R_i \frac{1}{n}$, (если только корни уравненія $\alpha^n = 1$ считать рационально извѣстными) и отсюда, какъ слѣдствіе, получаетъ вышеупомянутый критерій Galois.

Попутно авторъ доказываетъ теорему Kronecker'a, что R_i суть корни уравненія $(n-1)$ степени съ рациональными коэффициентами, принадлежащаго къ категоріи Абелевыхъ, т. е. такого уравненія, всѣ корни котораго выражаются рационально при помощи одного изъ нихъ, выбраннаго по произволу. Хотя работа эта не заключаетъ новыхъ результатовъ, тѣмъ не менѣе уясненіе связи между изслѣдованіями Абеля и Галуа представляется особенно интереснымъ и имѣющимъ значеніе хотя бы для цѣлей педагогическихъ; по всѣмъ вѣроятіямъ авторъ былъ наведенъ на свои изслѣдованія соображеніями о томъ, что только алгебраическія уравненія первонач. степени обладающіе цѣлой линейной группой (изслѣдов. Галуа) будутъ разрѣшимы въ радикалахъ: представлялось поэтому естественнымъ изслѣдовать вліяніе подстановокъ S и T , такъ называемыхъ основныхъ подстановокъ цѣлой линейной группы, на тѣ функціи корней уравненія, которыя входятъ въ выраженіе радикальнаго рѣшенія на основаніи изслѣдованій Абеля.

3) Sur l'addition des intégrales elliptiques de premiere, deuxième et troisième espèce. (Nouvelles annales de mathém., 1889). Разсужденіе представляетъ развитіе идеи Halphen'a, Tráité I, p. 30, 58, 215.

4) Аналогія между эллиптическими и тригонометрическими функціями. (Сообщеніе, чит. 25-го мая 1889 на 89 засѣданіи Физ. Мат. Секціи Обществ. Естест. при Каз. Унив.). Среди различныхъ возможныхъ способовъ изслѣдованія той аналогіи, о которой идетъ рѣчь, авторъ свой разборъ „cas de dégenescence“ эллиптическихъ функцій основываетъ

на изысканіяхъ такихъ трансцендентныхъ функцій $\varphi(u)$ и $\tau(u)$, которыя удовлетворяли бы функціональному уравненію: $\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(a) - \varphi(u)$, причемъ въ зависимости отъ того: имѣемъ ли дѣло съ эллиптическими или тригонометрическими функціями, различаетъ два случая: 1) $\varphi(u)$ обладаетъ двумя періодами: дѣйствительнымъ и мнимымъ 2) $\varphi(u)$ обладаетъ однимъ дѣйствительнымъ періодомъ.

Предполагая, что $\tau(u)$ голоморфная функція аргумента, авторъ находитъ прежде всего, что $\tau(u)$ есть нечетная функція аргумента и что $\tau(0) = 0$; затѣмъ соображеніями, основанными на разсмотрѣніи порядка главныхъ членовъ разложенія, встрѣчаемыхъ при изслѣдованіи функцій по возрастающимъ степенямъ аргумента, авторъ приходитъ къ заключенію, что въ 1-мъ случаѣ $\varphi(u)$ есть мероморфная двояко-періодическая функція 2-го порядка, причемъ она удовлетворяетъ дифференціальному уравненію: $(\varphi'(u))^2 = A \left[(\varphi(u) - \varphi(w)) \right] \cdot (\varphi(u) - \varphi(w_1)) \left[(\varphi(u) - \varphi(w + w_1)) \right]$, ибо функціи, стояція въ правой и лѣвой части этого соотношенія, обѣ будутъ мероморфными функціями 6-го порядка.

Изслѣдуя затѣмъ мероморфную двояко-періодическую функцію $\left(\frac{\varphi'(u) - \varphi'(r)}{\varphi(u) - \varphi(r)} \right)^2$ и дѣлая добавочное предположеніе: $\varphi(w) + \varphi(w_1) + \varphi(w + w') = 0$, обращающее $\varphi(u)$ въ функцію $p(u)$ Вейерштрасса, (т. е. такую функцію, что $(p'(u))^2 = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3$), авторъ устанавливаетъ для нея извѣстную теорему сложения: $p(u+r) + pu + pr = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'r}{pu - pr} \right)^2$, причемъ какъ слѣдствіе получаетъ извѣстную весьма важную теорему: сумма аргументовъ, удовлетворяющихъ уравненію $p'u = a$, всегда равна нулю.

Приступая затѣмъ къ изслѣдованію голоморфной функціи $\tau(u)$, опредѣляемой трансцендентнымъ уравненіемъ: $\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = p(u) - p(a)$ и пользуясь затѣмъ теоремой сложения для функціи $\zeta(u)$, а также формулой опредѣленія Вейерштрассовой функціи $\sigma(u)$: $\frac{d}{du} \log \sigma(u) = \zeta(u)$, авторъ получаетъ, что $\tau(u) = e^{-\frac{u^2 \zeta(u)}{2\omega}} \sigma(u)$, т. е., что функція $\tau(u)$ отличается отъ Якобевой функціи $\vartheta_1(u)$ только постояннымъ множителемъ. Аналогичныя изслѣдованія для 2-го случая приводятъ автора къ заключенію,

что $\varphi(u)$ для этого случая равна $m + \cotg^2 u$, которая и соответствует такимъ образомъ функции pu и что $\tau(u) = \sin u$, т. е. $\frac{d \log \tau(u)}{du} = \cotg u$, которой соответствует такимъ образомъ эллипт. функции $\zeta(u)$.

5) „Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel“. („Journal des Math. pures et appliquees“. t. VI de la 4 serie. 1890).

Мемуаръ этотъ былъ анализированъ выше въ текстѣ очерка.

6) „Sur les intégrales pseudo-elliptiques qui dépendent d'une racine cubique d'un polynome du troisième degré“. „Bulletin des sciences mathematiques“. 2 serie t. XVII. 1893.

Предметомъ работы является изучение свойствъ

интеграла: $A = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$, который

авторъ выражаетъ въ эллиптическихъ функцияхъ Вейерштрасса, замѣчая, что функция и интегралъ дифференціального уравненія $\left(\frac{du}{dz}\right)^3 = (u-a')^2(u-b')^2$ (1), опредѣляемый условіемъ $\frac{u}{z} = 0$, будетъ,

какъ легко показать, двояко-періодической функцией такого вида: (2) $u = Mp'z + N$; гдѣ M, N , а также g_2, g_3 опредѣляются подстановкой выраженія (2) въ соотношеніе (1); примѣняя тогда къ интегралу A

подстановку $x - a = \frac{1}{u}$ и полагая $\frac{1}{b-a} = a'$; $\frac{1}{c-a} = b'$, авторъ приводитъ интегралъ къ виду:

$$A = h \int \frac{pz(p'z - \frac{a'+b'}{27}) dz}{p'z - \frac{a'b'}{36}}; \text{ разложениѣмъ рациональ-}$$

ной дроби $\frac{pz}{pz^3 - h^3}$ на простѣйшія вопросъ приво-

дится къ вычисленію интеграла $B = \frac{a'+b'}{2 \cdot 3^3} \int \left(\frac{1}{pz-h} + \right.$

$\left. + \frac{a^2}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha}{pz-\alpha^2 h} \right) dz$, ибо $A-B = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{p'dz}{pz-h} + \right.$

$\left. + \frac{\alpha^2 p'z}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha p'z}{pz-\alpha^2 h} \right) dz$ (гдѣ $\alpha^3 = 1$) непосредственно

вычисляется въ логарифмахъ.

Примѣненіе извѣстныхъ формулъ однородности эллипт. функций для случая $g_2 = 0$ позволяетъ автору представить функцию, стоящую подъ знакомъ интеграла B , въ видѣ: $\frac{1}{p'z_0} \{ [\zeta(z-z_0) - \zeta(z+z_0)] + \alpha^2 [\zeta(z-\alpha z_0) - \zeta(z+\alpha z_0)] + \alpha [\zeta(z-\alpha^2 z_0) - \zeta(z+\alpha^2 z_0)] \}$, а потому и весь интегралъ A такимъ обра-

зомъ: $-\log \left\{ \left[\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z} \right] \left[\frac{\sigma(z+\alpha z_0)}{\sigma z} \right]^{\alpha^2} \left[\frac{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}{\sigma z} \right]^{\alpha} \right\}$ или

что все равно:

$$A = -\frac{1}{m} \log \left\{ \left[e^{-\frac{2\eta z}{m} \frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}} \right]^m \left[e^{-\frac{2\alpha^2 \eta z}{m} \frac{\sigma(z+\alpha z_0)}{\sigma z}} \right]^{m\alpha^2} \cdot \left[e^{-\frac{2\alpha \eta z}{m} \frac{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}{\sigma z}} \right]^{m\alpha} \right\},$$

откуда принимая во вниманіе извѣстный результатъ Halphen'a, по которому три функции, заключенныя выше въ прямые скобки выражаются рационально въ pz и $p'z$ если z_0 есть соизмѣримая часть періода, авторъ приходитъ къ теоремѣ: если $g_2 = 0$; $g_3 = -$

$$-\frac{1}{3^6} \frac{(b-c)^2}{(a-b)^2(a-c)^2} \text{ и } pz_0 = \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)(a-c)}}, \text{ то}$$

интегралъ $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$ выражается

въ логарифмахъ при условіи, что z_0 равно $\frac{2\omega}{m}$, т. е. есть соизмѣримая часть періода.

Замѣтивъ далѣе, что въ извѣстныхъ примѣрахъ приводимыхъ интеграловъ вышерассмотрѣннаго типа:

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - p^2 x}} \text{ и } (4) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}, \text{ } z_0 \text{ равно соот-}$$

вѣтственно половинѣ и третьей части періода и что слѣдовательно интегралы эти выражаются въ логарифмахъ, авторъ ставитъ задачу объ ихъ вычисленіи, для каковой цѣли пользуясь извѣстными соотношеніями между функциями $\sigma(u)$ и $p(u)$ получаетъ— A

равнымъ: $\frac{1}{m} [P_0 - P_2 - 2P_3 - \dots - (m-2)P_{m-1} -$

$-(m-1)P_m + (m-1)P_0]$, гдѣ $P_k = \log \{ [p(z-kz_0) -$

$-pz_0] [p(z-k\alpha z_0) - p\alpha z_0]^{\alpha^2} [p(z-k\alpha^2 z_0) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha} \}$,

т. е. $P_m = P_1$; отсюда искомая формула:

$$A = \frac{1}{m} \log \prod_{i=0}^{j=m-1} \{ [p(z-iz_0) - pz_0] [p(z-i\alpha z_0) -$$

$-p\alpha z_0]^{\alpha^2} [p(z-i\alpha^2 z_0) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha} \}^{i-1}$, примѣняя ко-

торую авторъ получаетъ извѣстныя выраженія для (3) и (4) въ конечномъ видѣ.

Далѣе авторъ занимается рѣшеніемъ задачи Чебышева для интеграловъ типа

$$B = \int \frac{(x+N) dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

т. е. изысканіемъ условій, необходимыхъ и достаточныхъ, при которыхъ можно выбрать неопредѣленное число N такимъ образомъ, чтобы интегралъ B выражался только въ логарифмахъ. Представляя интегралъ

В въ эллиптическихъ функціяхъ авторъ получаетъ формулу: $B = [3\zeta(z_0) - 3 \frac{2\eta}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + H)] z - \frac{1}{m} \log \left\{ \left[e^{\frac{-2\eta z}{m}} \frac{\sigma(z + z_0)}{\sigma z} \right]^m \left[e^{\frac{-2\alpha^2 \eta z}{m}} \frac{\sigma(z - \alpha z_0)}{\sigma z} \right]^{m\alpha} \left[e^{\frac{-2\alpha \eta z}{m}} \frac{\sigma(z + \alpha^2 z_0)}{\sigma z} \right]^{m\alpha^2} \right\}$, откуда теорема: сохраняя

для g_2, g_3, pz_0 тѣ же значенія, что и въ предыдущей теоремѣ, имѣемъ: интеграль B выражается въ логариумахъ, если z_0 есть соизмѣримая часть періода и число H выбрано подъ условіемъ: $3\zeta(z_0) - 3 \frac{2\eta}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2} (a + H) = 0$.

Примѣняя тѣ же рассужденія, авторъ получаетъ общую формулу для вычисленія интеграла B , которую и прилагаетъ затѣмъ къ вычисленію такъ называемаго псевдо-эллиптического интеграла Абеля

т. е. интеграла вида: $\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{R(x)}}$; результатомъ такого приложенія является соотношеніе:

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{R}} = -\frac{1}{m} \log \prod_{i=0}^{i=m-1} [p(u - iv) - pv]^{i-1},$$

позволяющее вычислить искомый интеграль съ тѣмъ большимъ удобствомъ по отношенію къ методу предыдущаго мемуара, что здѣсь окончательные результаты зависятъ отъ одного только основнаго радикала

$$\sqrt{R} = \sqrt{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4},$$

но не отъ цѣлаго ряда другихъ радикаловъ, полученныхъ послѣдовательными преобразованіями. Въ заключеніе авторъ прилагаетъ свой методъ къ вычисленію частнаго примѣра:

$$\int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 4x + 1}} = \log \frac{(x^2 - 1 + R)(x^2 + 1 + R)}{(x^2 - 1 - R)(x^2 + 1 - R)}.$$

7) Sur les intégrales pseudo-elliptiques dépendant des radicaux du quatrième et sixième degré. (Bulletin des sciences. Math. t. XVII. 1893. p. 1—9.).

Примѣняя методъ предыдущаго мемуара, авторъ ищетъ условія необходимыя и достаточныя, чтобы при извѣстномъ значеніи H , интеграль

$$j = \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)}}$$

выражался въ логарифмахъ и приходитъ къ теоремѣ:

$$\text{Полагая } g_2 = \frac{2(b-a)}{3(c-a)(c-b)}, g_3 = 0 \text{ и } pz_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{6(c-b)}}$$

можно выразить интеграль j въ логариумахъ если $z_0 = \frac{2\omega}{m}$ т. е. соизмѣримой части періода; въ частномъ случаѣ $c = 2a - b$, вычисленія даютъ $z_0 = \frac{2\omega}{4}$, т. е. если корни a, b, c подрадикальнаго полинома образуютъ арифметическую прогрессию радіуса равнаго $(a - b)$, то интеграль j выражается въ логариумахъ.

Тѣ же рассужденія въ примѣненіи къ интегралу

$$j_1 = \int \frac{(x + H)dx}{\sqrt{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}$$

приводятъ автора къ теоремѣ: если

$$g_2 = 0; g_3 = \frac{b-a}{30(a-c)(b-c)}, pz_0 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{(c-b)^{15}}},$$

то интеграль j_1 выражается въ логариумахъ при условіи, что $z_0 = \frac{2\omega}{m}$, т. е. равно соизмѣримой части періода, а это условіе будетъ выполнено (какъ показ. авторъ), на примѣръ, при слѣдующемъ соотношеніи между корнями подрадикальнаго полинома: $c = 4b - 3a$.

8) „Объ интегрированіи посредствомъ эллиптическихъ функцій“ (Казань. 1891, стр. 1—28).

Въ этой статьѣ авторъ занимается вопросомъ о приведеніи общаго эллиптического интеграла:

$$\int \frac{F(x)}{F_1(x)} \frac{xd}{\sqrt{R}}$$

(гдѣ F и F_1 рациональныя функ-

ціи и R полиномъ 4-ой степени); соображеніями, основанными на рассмотрѣніи главныхъ членовъ разложенія эллиптическихъ функцій Вейерштрасса, авторъ доказываетъ, что всякій эллиптический интеграль выражается алгебраической функціей и тремя неприводимыми эллиптическими интегралами:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{u}{\sqrt{a_0}}, \int \left(\frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) du; \int \left(\frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)^2 du,$$

причемъ попутно получаетъ теорему сложенія для функцій pu и новую форму обращенія (о которой выше уже шла рѣчь) эллипт. интеграла.

9) „Sur la forme plus précise des racines des équations algébriques résolubles par radicaux“ (Bulletin des sc. Math. 2-me série t. XVIII. стр. 1—14).

По теоріи Galois разрѣшimy въ радикалахъ, какъ извѣстно, только тѣ уравненія первоначальной степени, для которыхъ всякая рациональная функція корней неизмѣняемая подстановками т. н. цѣлой

линейной группы $\left(\frac{az+b}{z}\right)$ будет рационально известна. Независимо от теории Galois, авторъ въ этомъ мемуарѣ ставитъ себѣ цѣлью доказать, что всякое неприводимое алгебраическое уравненіе простой степени, обладающее вышеупомянутымъ свойствомъ, будетъ разрешимо въ радикалахъ и, что кромѣ того, можно найти точную форму корней этого уравненія.

Для этой цѣли авторъ рассматриваетъ функцію: $Q = R_1 \cdot R_{n-1} + R_p R_{n-p} + \dots + R_{\frac{n-3}{2}} R_{\frac{n-3}{2}}$, гдѣ $R_1 = x_0 + d^{n-1} x_1 + \dots + dx_{n-1}$; гдѣ x_i суть корни уравненія $x^n + px^{n-1} + \dots + s = 0$, d и w суть соответственно корни двухчленныхъ уравненій $d^n = 1$ и $w^{\frac{n-1}{2}} = 1$; эта функція Q равно какъ и $\frac{n-3}{2}$ функцій вида: $Q_i = (R_1 R_{n-1} + w R_p R_{n-p} + \dots + w^{\frac{n-3}{2}} R_{\frac{n-3}{2}} R_{\frac{n-3}{2}})^{\frac{n-1}{2}}$ (гдѣ w есть одинъ изъ первообразныхъ корней уравненія $w^{\frac{n-1}{2}} = 1$) не измѣняются основными подстановками цѣлой линейной группы, а потому согласно условію будутъ рационально известны; для функціи Q авторъ даже непосредственно находитъ $Q = -np$, т. е. что Q рационально известна.

Отсюда, пользуясь свойствами корней двухчленныхъ уравненій, авторъ получаетъ выраженія для $R_p^i R_{n-p}^i$, гдѣ i пробѣгаетъ значенія отъ 1 до $\frac{n-1}{2}$; тѣже разсужденія въ примѣненіи къ функціямъ корней:

$$\left[R_1^n + R_{n-1}^n + w (R_p^n + R_{n-p}^n) + \dots + w^{\frac{n-3}{2}} (R_{\frac{n-3}{2}}^n + R_{\frac{n-3}{2}}^n) \right]^{\frac{n-1}{2}} = h_1,$$

позволять получить выраженія для $R_p^i + R_{n-p}^i$ откуда, какъ слѣдствіе, авторъ получаетъ R_p^i и R_{n-p}^i какъ корни квадратнаго уравненія, коэффициенты котораго имѣютъ опредѣленную радикальную форму. Найдя теперь R_{p^i} , а слѣдовательно и R_{p^i} , авторъ, пользуясь свойствами двухчленныхъ уравненій, находитъ выраженіе для корней x_i въ функціи R_i причемъ убѣждается, что корни разрешимаго уравненія простой степени имѣютъ форму, предусмотрѣнную Абелемъ; въ частности для уравненій 5-ой степени подтверждается результатъ Абеля: корни имѣютъ форму: $x = A + \sqrt[5]{R_1} + \sqrt[5]{R_2} + \sqrt[5]{R_3} + \sqrt[5]{R_4}$, гдѣ R_i суть корни уравненія 4-ой степени выразимыя помощью однихъ квадратныхъ радикаловъ.

10) „Sur la résolution algébrique des équations de degré premier“. (Bulletin des Sciences math. 2-me série. 1895. p. 1—6).

Авторъ доказываетъ здѣсь теорему, помощью которой можно разрешить въ радикалахъ уравненія 5 и 7-ой степени конечнымъ числомъ операцій при условіи, что эти уравненія обладаютъ группой Galois. Изученія вліянія основныхъ подстановокъ S и T цѣлой линейной группы на функцію такого вида:

$\zeta_1(\alpha) = R_1 R_{p^2} \dots R_{p^{n-3}} + R_p R_{p^3} \dots R_{p^{n-2}}$ приводитъ автора къ заключенію, что $\zeta_1(\alpha)$ будетъ метациклической (по терминологіи Кронекера) функціей корней, кромѣ того $\zeta_1(\alpha)$ не зависитъ отъ α , отсюда ясно, что $\zeta_1(\alpha)$ есть цѣлый корень резольвенты $(n-r)!$ степени, коэффициенты которой суть известные цѣлыя числа. Подобнымъ же образомъ доказывается, что $(R_1 R_{p^2} \dots R_{p^{n-3}} - R_p R_{p^3} \dots R_{p^{n-2}})^2 = \zeta'_1$ есть известное цѣлое число, а потому:

$$R_1 R_{p^2} \dots R_{p^{n-3}} = \frac{1}{2} (\zeta_1 + \sqrt{\zeta'_1})$$

$$R_p R_{p^3} R_{p^5} \dots R_{p^{n-2}} = \frac{1}{2} (\zeta_1 - \sqrt{\zeta'_1})$$

Тѣ же разсужденія повторяются для функцій:

$$\begin{cases} (R_1^n + R_{p^2}^n + \dots + R_{p^{n-3}}^n) + (R_p^n + \dots + R_{p^{n-2}}^n) = \zeta_2, \\ [(R_1^n + R_{p^2}^n + \dots + R_{p^{n-3}}^n) - (R_p^n + \dots + R_{p^{n-2}}^n)] = \zeta'_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A + B &= (R_1^n R_{p^2}^n + R_1^n R_{p^4}^n + \dots + R_{p^{n-5}}^n R_{p^{n-3}}^n) + \\ &+ (R_p^n R_{p^3}^n + \dots + R_{p^{n-4}}^n R_{p^{n-2}}^n) = \zeta_3 \\ (A - B) &= \zeta'_3 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что разрешеніе даннаго уравненія зависитъ отъ 2 слѣдующихъ:

$$\begin{aligned} \xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2} (\zeta_2 + \sqrt{\zeta'_2}) \xi^{\frac{n-3}{2}} + \dots \\ \pm \frac{1}{2^n} (\zeta_1 + \sqrt{\zeta'_1})^n; \xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2} (\zeta_2 - \sqrt{\zeta'_2}) \xi^{\frac{n-3}{2}} + \dots \\ \pm \frac{1}{2^n} (\zeta_1 - \sqrt{\zeta'_1})^n, \text{ т. е. имѣетъ мѣсто теорема:} \end{aligned}$$

Если неприводимое уравненіе простой степени n съ цѣлыми коэффициентами разрешимо въ радикалахъ: то его рѣшеніе зависитъ отъ уравненія $\frac{n-1}{2}$ степени съ коэффициентами вида $a + \sqrt{b}$; гдѣ a и b суть цѣлыя числа, опредѣляемыя конечнымъ числомъ операцій.

Въ приложеніи къ уравненію 5-ой степени: ζ_1 рационально известно $= 5p$; $\zeta_2, \zeta_1^1, \zeta_2^1$ будутъ митациклическими функціями, причемъ ζ_1^1 будетъ известной митациклической функціей Якоби.

$$11) \text{ „Sur l'integrale } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px^2 + q}} \text{“}$$

(Bullet des Sciences Math. 2-me série. t. XIX. 1895. p. 1—9).

Въ этой статьѣ авторъ прилагаетъ свой методъ вычисленія въ логариѣмахъ къ интегралу;

$$j = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px^2 + q}}$$

лизи Бертрана къ категоріи эллиптическихъ. Разсужденіями совершенно аналогичными съ тѣми, о которыхъ было уже упомянуто, авторъ устанавливаетъ, что интегралъ j выражается въ логариѣмахъ только въ томъ случаѣ, если аргументъ Z_0 ,

опредѣляемый соотношеніемъ $PZ_0 = \frac{1}{6(a-b)}$, б у-
дутъ соизмѣримой частью періода, причемъ $x^4 + px^2 + q = (x^2 - a)(x^2 - b)$; $g_3 = 0$; $g_2 = \frac{2}{3} \frac{b}{a(a-b)}$.

Въ качествѣ примѣровъ здѣсь приводятся интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - a^2}} \text{ и } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 - a)(x^2 + 3a \pm a\sqrt{3})}},$$

для которыхъ Z_0 соответственно равно половинѣ и третьей части періода. Затѣмъ сдѣлавъ указаніе на возможность примѣненія формулъ умноженія эллипт. аргумента на цѣлое число къ вопросу о выразимости интеграла въ логариѣмахъ, авторъ, пользуясь соотношеніемъ между функциями σ и p получаетъ тѣмъ же приемомъ, что и раньше, формулу для вычисленія интеграла j въ функции p и Вейерштрасса.

12) „Sur la détermination du genre d'une certaine catégorie d'intégrales abéliennes et quelques applications“. (Bulletin des Sciences Mathem. 2^{ser} XIX. 1895. p. 1—10).

Въ этой работѣ авторъ даетъ новое опредѣленіе ранга абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ двучленныхъ алгебраическихъ уравненій: рангъ I инте-

$$\text{грала } j = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda}}$$

независимыхъ интеграловъ вида: $I_n =$

$$= \int \frac{F(x) dx}{\sqrt[4]{[(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda]^n}} \quad (\text{гдѣ } n \leq m-1)$$

и сохраняющихъ притомъ конечныя значенія на всей поверхности Римановой сферы; называя это число черезъ N авторъ находитъ для него формулу:

$$N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{(m-1)p_i - q_i + 1}{q_i}, \text{ гдѣ}$$

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda = mk; \quad \frac{\alpha}{m} = \frac{p_1}{q_1} \dots \frac{\lambda}{m} = \frac{p_m}{q_m}.$$

Прилагая эту формулу къ нѣкоторымъ частнымъ интеграламъ, авторъ указываетъ на важность полученія всѣхъ наиболѣ простыхъ интеграловъ 1-го рода (что достигается также его способомъ) во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда въ силу условій задачи приходится совершать т. н. обращеніе интеграла. Затѣмъ для поясненія теоріи авторъ занимается изисканіями условій, при которыхъ интегралы:

$$A = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}},$$

$$B = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)(x-b)(x-c)^2}}$$

выражаются въ логариѣмахъ и приходитъ слѣдующему же процессу, о которомъ было неоднократно упомянуто выше къ условію, что аргументъ Z_0 (гдѣ $pZ_0 = \text{нѣкоторой const}$, опредѣляемой рассматриваемой частной задачей) долженъ равняться соизмѣримой части періода.

Здѣсь же трактуется вопросъ о приведеніи ин-

теграла Эйлера: $\int X \frac{dx}{x}$ (гдѣ X есть рациональ-

ная функція $x^n \sqrt[n]{a+bx^n}$) къ логариѣмамъ и указываются въ качествѣ примѣровъ интегралы:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x^3-a)(x^3-b)}} \text{ и } \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^4-a)(x^4-b)}},$$

рангъ которыхъ можетъ быть опредѣленъ путемъ предварительной подстановки: $x^3 = y$ въ 1-мъ интегралѣ и $x^4 = t$ во второмъ.

13) „Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binôme“. (Bulletin des Sciences Math, 2^{ser} t. XX. 1896 p. 1—29).

Обращая вниманіе на неудовлетворительную постановку, даже въ классическихъ руководствахъ (Serret), вопроса о приводимости абелевыхъ интеграловъ, зависящихъ отъ двучленныхъ уравненій, авторъ возвращается къ своему вышеупомянутому опредѣленію ранга интеграла и изслѣдуетъ множество частныхъ примѣровъ, трактуя для нѣкоторыхъ изъ нихъ, слѣдующему выше намѣченному методу, вопросъ о выразимости ихъ въ логариѣмахъ.

14) „Remarque sur le genre des intégrales abéliennes“. Bull. des Sc. Math. t. XXI. p. 1—2.

Замѣтка эта имѣетъ цѣлью показать, что выше данное опредѣленіе ранга абелеваго интеграла, тождественно съ таковымъ-же получаемымъ, слѣдующей общей теоріи Riemann'a.

15) „Изслѣдованія по теоріи абелевыхъ интеграловъ“. Диссертация, представлен-

ная Совѣту Горнаго Института. С.-Петербургъ 1897.

Сочиненіе это въ общемъ представляетъ собою систематическое изложеніе работъ покойнаго профессора, печатавшихся въ иностранныхъ математическихъ журналахъ и рецензіи о которыхъ были даны выше.

16) „Etude directe des integrales abeliennes du genre un“. Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 3 serie. t. XV. (p. 393—430). Рецензія этого мемуара помѣщена въ Bulletin des Sc. math. 1900. p. 67—69; ниже мы помѣщаемъ ее въ переводѣ:

Предметомъ работы является задача обращенія при помощи эллиптической функціи pu Вейерштрасса, трехъ единственныхъ интеграловъ 1-го ранга вида:

$\int \frac{dx}{V^m (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-\rho)^\lambda}$, а также эллиптического интеграла 1-го рода.

1°. Разсматривая сперва интегралъ: (1) $u =$

$= \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}$, авторъ прежде всего устанавливаетъ, что x есть монодромная функція u на всей поверхности Риманна.

Полагая затѣмъ $x-a = \frac{1}{\xi}$, что мѣняетъ предложенный интегралъ въ другой

$z = \int_\infty^\xi \frac{d\xi}{\sqrt[3]{(\xi-a')^2 (\xi-b')^2}}$ онъ находитъ: $\xi = \frac{27}{2} p'z + \frac{a'+b'}{2}$, причемъ инварианты pz имѣютъ значенія: $g_2 = 0$; $g_3 = -\frac{(a'-b')}{27}$.

2) Трактую затѣмъ соотношеніе:

(2) $u = \int_a^x \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}}$, можно убѣ-

диться, что x есть монодромная функція u на всей поверхности Риманна. Линейнымъ преобразованиемъ замѣщается исходное соотношеніе такимъ уравне-

ніемъ: $z = \int_\infty^\xi \frac{d\xi}{\sqrt[4]{\xi^2 (\xi-a)^3}}$, откуда получается: $\xi = 6p^2z + d$; $g_2 = -\frac{2d}{3}$, $g_3 = 0$.

Можно было-бы также привести предложенное

уравненіе къ виду: $z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3 (x-a)^3}}$; авторъ показываетъ, что обращеніе аргумента Z можетъ быть получено прямо, не прибѣгая къ предварительной подстановкѣ $x = \frac{1}{y}$, имѣющей цѣлью при-

вести всѣ безконечности x въ одну точку на Риманновой поверхности.

3. Третій разсматриваемый интегралъ:

(3) $u = \int_c^x \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}}$ опредѣляетъ

x , какъ монодромную функцію u на всей поверхности.

Подстановкой $x-c = \frac{1}{y}$, приводятъ предложенное

уравненіе къ виду: $z = \int_\infty^y \frac{dy}{\sqrt[6]{(y+\alpha)^3 (y+\beta)^4}}$, об-

ращеніе котораго даетъ: $y = 2^4 3^6 \left(4p^3 z - \frac{\beta}{2^4 3^6} \right)$; $g_2 = 0$; $g_3 = \frac{\beta-\alpha}{2^4 3^6}$.

Можно было-бы также привести исходное урав-

неніе къ виду: $z = \int_\beta^\xi \frac{d\xi}{\sqrt[6]{(\xi-\alpha)^4 (\xi-\beta)^6}}$, соотношеніе,

обращеніе котораго можно совершить не примѣняя предварительной подстановки: $\xi - \beta = \frac{1}{y}$.

Тоже предложеніе вѣрно для соотношенія:

$z = \int_\beta^\xi \frac{d\xi}{\sqrt[6]{(\xi-\alpha)^3 (\xi-\beta)^5}}$, которое есть другая форма уравненія (3).

Эта возможность прямого обращенія, независимо отъ подстановки вида $x-a = \frac{1}{y}$ устанавливается затѣмъ авторомъ для каждого изъ интеграловъ вида (1), (2), (3).

Конецъ мемуара заключаетъ детали вычисленій, которыя надъ совершить, чтобы согласно указанію, данному Halphen'омъ (Traité des fonctions elliptiques t. 1. p. 131), совершить обращеніе интеграла

$z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}}$ ($J(y) = y^4 + 6d_2 y^2 + 4d_3 y + d_4$) не рѣшая уравненія $J = 0$.

Такимъ образомъ находятъ: $z = \int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$

гдѣ инварианты имѣютъ значенія: $g_2 = d_4 + 3d_2^2$; $g_3 = d_2^3 + d_2 d_4 - d_3^2$.

Сопоставляя этотъ результатъ съ преобразованиемъ указаннымъ авторомъ въ одной изъ предыдущихъ его работъ, приходятъ къ теоремѣ:

Если имѣя уравненіе: $z = \int \frac{dy}{\sqrt{J(y)}}$,

откуда обращеніемъ получится $y - y_1 = \frac{p'Z_0}{pZ - pZ_0}$, выполнимъ подстановку:

$$\sqrt{J(y)} = y^2 + 3d_2 - \frac{2d_3}{\eta},$$

то для новой переменной η получается выражение:

$$\eta = \frac{p'(2z_0)}{pz - p(2z_0)},$$

которое отличается от $y - y_1$ только удвоением аргумента z_0 , причем инварианты g_2 и g_3 в обоих случаях имѣют одни и тѣ же значенія.

17) Сравненіе поверхностей шаръ, эллипсоида, гиперболоида и параболоида вращенія, заданныхъ извѣстными условіями (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1897 г.). Вычисленія, составляющіе предметъ замѣтки, приложены къ работѣ П. Ф. Лесгафта „Теорія простыхъ суставовъ“.

18) Обобщеніе задачи Бертрана. (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1898). Авторъ доказываетъ теорему: Если точка, подъ дѣйствіемъ центральной силы, описываетъ алгебраическую кривую, отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ съ началомъ въ точкѣ пересѣченія силъ, то движущая сила выражается формулой

$$F = \frac{G^2 r H(u)}{(n-1)^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^3} \quad (z=1), \text{ гдѣ } H(u) \text{ есть Гессіанъ кри-}$$

вой; $\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=1}$ есть лѣвая часть ур-ія первой по-

ляры начала координатъ. Разсмотрѣнь примѣръ: кривая $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Gz^2 = 0$.

19) Определеніе предѣловъ въ кратныхъ интегралахъ. (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1898).

20) О третьей кривизнѣ кривыхъ въ пространствѣ. (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1898).

21) Etude directe des équations différentielles hypergéométriques aux quelles satisfont les périodes ω et η des intégrales elliptiques. (Извѣстія С.П.Б. біолог. лабор., 1899). Поводомъ къ работѣ послужила ошибка, допущенная Гальфеномъ при выводѣ относящагося сюда ур-ія (Halphen, I, p. 313). Анализъ автора восстанавливаетъ истинную форму этого ур-ія.

22) Объ алгебраическихъ уравненіяхъ, обладающихъ дробной линейной группой. (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1901).

23) Вычисленіе площадей кривыхъ поверхностей и объемовъ посредствомъ введенія произвольныхъ параметровъ. (Извѣстія С.П.Б. біологической лабораторіи, 1901 г.).

Для вычисленія площадей авторъ вводитъ переменное t , полагая $y = tx$. Для вычисленія объемовъ: $x = x$, $y = tx$, $z = vx$.

Методъ поясненъ многими примѣрами.

24) Sur un cas de réductibilité des intégrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXV 1901). Въ этой замѣткѣ авторъ приводитъ къ эллиптическимъ два интеграла:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3 + 3ax^2 + 3bx + c)(x^2 + 2ax - 4b - 3a^2)}}$$

$$\text{и } \int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 4ax^4 + 10bx^3 + 5a^2x^2 + 18abx + 2a^3 + 27b^2}}.$$

При $a=0$ первый интегралъ указанъ Эрмитомъ,

а второй обращается въ интегралъ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^6 + 10bx^3 + 27b^2}}$,

приводимый при помощи подстановки $x^4 + 4bx = y$.

25) Объ одномъ случаѣ приведенія абелевыхъ интеграловъ ранга $p > 2$. (Труды отдѣленія физическихъ наукъ Импер. Моск. Общества Любителей Естествознанія... т. X, 1901).

Въ этой работѣ авторъ доказываетъ теорему, высказанную ранѣе безъ доказательства (въ мемуарѣ Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binome. Bul. des Sc. mat., 2 série, t. XX, 1896): Дается алгебраическое уравненіе $F(x, y) = 0$ (*) ранга p . Если между линейно независимыми интегралами перваго вида $u_1, u_2 \dots u_{p-1}, W$, относящимися до кривой (*) найдется по крайней мѣрѣ одинъ эллиптический W , то рангъ остальныхъ интеграловъ $u_1, u_2 \dots u_{p-1}$ можетъ быть пониженъ, по крайней мѣрѣ, на единицу.

Авторъ поясняетъ теорему двумя примѣрами

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^3 - 1)^2 \cdot x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^5 (x-b)^{10} (x-c)^9}}.$$

26) О нѣкоторыхъ особыхъ свойствахъ абелевыхъ интеграловъ перваго ранга. (Извѣстія С.-П.Б. біологической лабораторіи, 1901).

Предметомъ этой работы служитъ нахожденіе определенныхъ интеграловъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}}, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2 (x-b)^3 (x-c)^3}},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^5}}, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

въ томъ случаѣ, когда предѣлы α и β интеграловъ

совпадаютъ съ критическими точками a, b, c, d . Авторъ доказываетъ, что всѣ эти интегралы суть опредѣленные соизмѣримыя части періодовъ. Далѣе авторъ разсматриваетъ интегралы

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}, \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}},$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}}, \int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}},$$

и доказываетъ, что, если одинъ изъ нихъ равенъ соизмѣримой части періода, то соотвѣтствующій ему

интегралъ третьяго вида $\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}, \int \frac{(x+H)dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^4(x-c)^5}},$$

$$\int \frac{(x+H)dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}}$$

при надлежащемъ выборѣ постояннаго H приводится къ логарифмамъ.

27) Объ одномъ геометрическомъ приложеніи псевдо-эллиптическихъ интеграловъ. (Труды отдѣленія физическихъ наукъ Императорскаго Моск. Общества любителей естествознанія, 1902).

Вычисленіе объема: 1) тѣла, ограничена конической поверхностью $xy - x^2 = z^2$, шаромъ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, плоскостью $ХОУ$ и какою-либо плоскостью чрезъ OZ ; 2) тѣла ограничена конической поверхностью $x^2 - y^2 = xz$, поверхностью второго порядка $\alpha(x^2 - y^2) + \beta z^2 = 1$ и плоскостями $ХОУ$, $ХОZ$ и $y = tx$. Объемъ выражается псевдо-эллиптическимъ интеграломъ. Авторъ указываетъ въ концѣ геометрическую интерпретацію эллиптического интеграла перваго рода.

28) Опредѣленіе главныхъ направлений въ твердомъ тѣлѣ. (Извѣстія С.-Пб. биологической лабораторіи, 1902).

29) Элементарный способъ вычисленія псевдо-эллиптическихъ интеграловъ. (Извѣстія биологической лабораторіи, 1903). Элементарный методъ выясненъ на классическихъ примѣрахъ Halphen'a и Abel'я. Для интеграла:

$$u = \int \frac{(\alpha x + h) dx}{\sqrt{x(x-1)(x-4)(x-9)}} (*) \text{ гдѣ } \alpha \text{ и } h \text{ не-}$$

опредѣленны, авторъ полагаетъ $x^3 + ax^2 + bx + c =$

$$= \lambda \sin(u \sqrt{-1}) \text{ и посредствомъ дифференцированія съ помощью } (*) \text{ устанавливаетъ тождество } (3x^2 +$$

$$2ax + b)^2 x(x-1)(x-4)(x-9) = (\alpha x + h)^2 [(x^3 +$$

$$+ ax^2 + bx + c)^2 - \lambda^2].$$

30) Sur l'inversion des integrales elliptiques. (Nouv. annales de math., 3 série t. XIX).

31) Двѣ задачи въ томъ-же журналѣ, 1903 г.

32) Recherche analytique sur la réduction des integrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathem., 2 serie, t. XXVII, 1903).

Въ этой работѣ авторъ изучаетъ условія приведенія къ эллиптическимъ интеграламъ

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \text{ при помощи подстановки } \varphi(x) =$$

$$= \lambda p(u, g_2, g_3),$$

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{R(x)}} \text{ при помощи подстановки } \varphi(x) =$$

$$= \lambda p^1(u, 0, g_3),$$

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{R(x)}} \text{ при помощи подстановки } \varphi(x) =$$

$$= \lambda p^2(u, g_2, 0),$$

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{R(x)}} \text{ при помощи подстановки } \varphi(x) =$$

$$= \lambda p^3(u, 0, g_3);$$

здѣсь $R(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)$, $\varphi(x)$ полиномъ, а λ числовой множитель. Въ концѣ мемуара изучено приведеніе къ эллиптическому инте-

грала $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^5 + x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}}$ при помощи

подстановки $\varphi(x) = \lambda p(u, g_2, g_3)$, гдѣ $\varphi(x)$ рациональная дробная функція. Теорія пояснена многими примѣрами.

33) De quelques points concernant la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXVII, 1903).

Въ этой работѣ авторъ примѣняетъ для преобразованія эллиптическихъ функцій методъ, развитый имъ въ предыдущемъ мемуарѣ для приведенія абелевыхъ интеграловъ. Какъ замѣчаетъ самъ авторъ, результаты получены отчасти уже Гальфеномъ.

Теорія пояснена многими примѣрами.

34) Recherche analytique sur la réduction des integrales abéliennes de seconde espèce. (Bulletin des Sciences mathem., 2 serie, t. XXVIII, 1904). Въ этомъ мемуарѣ авторъ изслѣдуетъ условія приведенія абелевыхъ интеграловъ къ эллиптическимъ второго рода при помощи метода, указаннаго въ одномъ изъ предыдущихъ мемуаровъ для приведенія абелевыхъ интеграловъ перваго рода. (Bulletin des Sc. mathem., 2 serie. t. XXVII, 1903).

35) Sur la liaison entre la théorie de la transformation des fonctions ellip-

tiques et la théorie analytique de la réduction des intégrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathématiques, 2 série, t. XXVIII, 1904).

Въ первой части мемуара авторъ изслѣдуетъ условія приводимости абелевыхъ интеграловъ

$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}, \int \frac{(x-t) dx}{\sqrt{R(x)}}$, гдѣ $R=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$, къ эллиптическимъ при помощи рациональной подстановки вообще. Затѣмъ онъ останавливается въ частности на подстановкахъ второй и третьей степени; попутно рассматривается преобразование третьей степени эллиптическихъ функций.

36) Sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques. Transformation d'un ordre impair. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXIX, 1905).

Авторъ замѣчаетъ, что алгебраическая теорія преобразования третьей степени, изложенная въ предыдущемъ мемуарѣ, не приложима къ преобразованиямъ высшихъ степеней. Пользуясь теоремой сложения аргументовъ, авторъ трактуетъ задачу о преобразованіи нечетной степени $2n+1$, въ частности девятой степени.

37) Remarques sur la théorie de la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des intégrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXX, 1906).

Въ первой части мемуара изучаются преобразования функции p Вейерштрасса; результатъ полученъ отчасти Кипертомъ. Во второй части тѣмъ же методомъ трактуются приведеніе интеграла

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^{2n+1} + A_1 x^{2n} + \dots + A_{2n+1}}}$ при помощи подстановки $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3)$. Въ третьей части также подстановка примѣнена для приведенія интеграла

$\int \frac{(x-t) dx}{\sqrt{x^{2n+1} + p_1 x^{2n} + \dots + p_{2n+1}}}$ при надлежаще выбранной постоянной t .

38) Quelques nouvelles remarques sur la transformation des fonctions elliptiques et sur la réduction des intégrales abéliennes. (Bulletin des Sciences mathem., 2 série, t. XXXI, 1907).

Дается интегралъ: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$.

Полагая $\sqrt{x^4 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4} = x^2 + \lambda + \frac{\mu}{y}$, гдѣ λ и μ произвольные коэффициенты, получимъ алгебраическое ур-іе $f(x, y) = 0$; $\Delta_x = x^4 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$ будетъ дискриминантомъ этого ур-ія, если раз-

сматривать его, какъ ур-іе въ y . Пусть Δ_y дискриминантъ его, какъ уравненія въ x , тогда:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\Delta_x}} = A \int \frac{dy}{\sqrt{\Delta_y}}, \text{ гдѣ } A \text{ постоянно. Авторъ}$$

замѣчаетъ, что при помощи этого преобразования весьма легко получить извѣстную формулу обращенія эллиптическихъ интеграловъ; затѣмъ примѣняетъ указанное свойство дискриминанта къ разысканію условій приводимости гиперэллиптического инте-

грала первого вида $\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$, гдѣ $R(x)$ полиномъ степени выше четвертой, а $F(x)$ цѣлая функция съ надлежаще выбранными коэффициентами.

39) Замѣтка объ остаточномъ членѣ ряда Тэйлора (Записки Горнаго Института, т. I, 1908).

40) Объ одномъ преобразованіи эллиптическихъ интеграловъ. (Записки Горнаго Института, т. I, 1908).

Преобразуется интегралъ $\int_{-\infty}^z \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$ въ интегралъ $\int_{-\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$ при помощи подста-

новки $\sqrt{x^4 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4} = -x^2 - \alpha + \lambda z$.

41) Новое доказательство основной теоремы алгебры. Доказательство существованія корня ур-я $F(x) = 0$ основано на изученіи конформнаго изображенія разности $F(x_0 + h) - F(x_0)$ въ окрестности точки x_0 .

42) Объ одномъ классѣ приводимыхъ гиперэллиптическихъ интеграловъ (тамъ же).

Ищутся условія приводимости интеграловъ:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x(x^2 + a_1 x + a_2)(x^2 + b_1 x + b_2)}} \text{ и } \int \frac{xdx}{\sqrt{(x^3 + ax^2 + 2abx + 2bca)(x+d)x}}.$$

Къ эллиптическимъ при помощи рациональной подстановки $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lambda p(u, g_2, g_3)$ наимншей степени.

43) Объ одномъ приложеніи теоріи исключенія къ теоріи абелевыхъ интеграловъ. (Записки Горнаго Института, т. II, 1909 г.).

Въ началѣ мемуара авторъ трактуетъ о рациональныхъ преобразованіяхъ (*) $\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$ алгебраическаго уравненія $F(x, y) = 0$. Очевидно, что ξ есть корень алгебраическаго уравненія (1) $y^k + B_1(\xi)y^{k-1} + B_2(\xi)y^{k-2} + \dots = 0$, а η есть корень уравненія (2) $y^{k^1} + D_1(\eta)y^{k^1-1} + D_2(\eta)y^{k^1-2} + \dots = 0$.

Если общій наибольшій дѣлитель полиномовъ въ

(1) и (2) первой степени относительно y , то приравнявая его нулю, найдем $y = Y(\xi, \eta)$. Подобным же образом $x = X(\xi, \eta)$; X и Y рациональные функции. Въ такомъ случаѣ преобразование (*) будетъ бираціональнымъ. Авторъ останавливается въ дальнейшемъ на такихъ преобразованіяхъ, которые не будутъ бираціональными; тогда общій наибольшій дѣлитель полиномовъ въ (1) и (2) будетъ выше первой степени относительно y и рангъ преобразованнаго уравненія $R(\xi, \eta) = 0$ будетъ ниже ранга даннаго уравненія.

Авторъ примѣняетъ эти соображенія для приведенія къ эллиптическимъ интеграламъ:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}}, \quad u =$$

$$= \int \frac{(x-t_1)(x-t_2)\dots(x-t_p)dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}}; \quad \text{въ частности}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4a)(x^5+5ax^3+5a^2x+d)}} \quad \text{и}$$

$$\int \frac{2(x+p)dx}{\sqrt{(x^4+4p^3x+c)(x^4+2px^3+p^2x^2+6p^3x+9p^4)}}.$$

Въ концѣ мемуара тѣмъ же методомъ авторъ трактуетъ задачу о преобразованіи второй степени эллиптическихъ функцій.

44) Теоремы, относящіяся до уравненія Монжа и Ампера. (Записки Горнаго Института, т. III, 1911 г.). Воспроизведеніе лекціи, читанной о методѣ Монжа.

П а м я т и

Ивана Петровича Долбни.

Въ предисловіи изданнаго на французскомъ языкѣ по постановленію Совѣта Горнаго Института Императрицы Екатерины II собранія сочиненій И. П. Долбни подъ заглавіемъ:

„Oeuvres mathématiques de Jean Dolbnia“ знаменитый французскій математикъ Gaston Darboux помѣстилъ слѣдующее предисловіе:

Il y a aujourd'hui plus de trente ans, je commençai à recevoir des mémoires d'un jeune géomètre russe, que je n' avais pas l'honneur de connaître. Ce géomètre, à peine âgé de trente ans, était précisément M. Jean Dolbnia dont l'École supérieure des mines le St.-Petersbourg publie les oeuvres par les soins de M. N. Kryloff. Les lettres d'envoi qui accompagnaient ces mémoires, n'étaient accompagnées d'aucun détail biographique, ni d'aucune indication bien développée sur la position de leur auteur; mais les mémoires étaient admirablement rédigés, dans un français très pur et très elegant, et ils roulaient sur les théories les plus élevées et les plus délicates de l'analyse. C'était plus qu'il n'en fallait pour que ces mémoires fussent bien accueillis; je m'empressai donc de les publier bien que leur étendue dépassât quelquefois les limites qui sont imposées à nos articles de mélanges du Bulletin des sciences mathématiques. Avant de les imprimer, je les lisais moi-même, ou bien je les faisais lire à quelqu'un de mes collaborateurs, qui me les renvoyait toujours en me pressant de les faire connaître au public mathématique. La belle notice sur la vie et les travaux scientifiques de Jean Dolbnia que le lecteur lira dans ce volume, m'a fait mieux connaître celui dont je publiais les travaux, en ayant regard à leur

seul mérite. Hélas! beaucoup de ceux, qui s'occupaient des mêmes questions que Jean Dolbnia, Hermite, Halphen, Raffy ne seront plus là pour les étudier de nouveau et les relire. Je suis convaincu d'avance qu'ils trouveront de nouveaux lecteurs, aussi bien dans le pays d'Hermite et d'Halphen que dans celui de Tschébycheff et de Zolotareff. Ce que je puis affirmer, c'est que, dans notre pays, déjà au moment de leur publication, ils faisaient grand honneur à leur auteur et à leur pays d'origine.

10 Octobre 1913.

Въ Парижской академіи наукъ М. Darboux, доложивъ о выходѣ собранія сочиненій Долбни, сказалъ слѣдующія теплыя слова, которыя въ Comptes rendus приведены въ слѣдующемъ видѣ:

„Le géomètre distingué dont je l'honneur de présenter les Oeuvres à l'Académie était, de son vivant, professeur d'Analyse à l'École des mines de St. Petersburg, dont il avait été le brillant élève; mais la plupart de ses travaux ont été publiés en français dans nos Recueils des mathématiques et principalement dans le Bulletin des sciences mathématiques. En décidant de les réunir en volume et de les présenter ainsi dans leur ensemble l'École des mines a rendu un réel service aux études mathématiques. Les travaux de Dolbnia font honneur à son pays“.

Указатель статей,

напечатанных в I—X тт. „Записок Ленинградского горного института (1907—1936) с алфавитным указателем авторов их

Составил О. А. Магнус

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ СТАТЕЙ ¹

М а т е м а т и к а

1. Акимов М. И., Доказательство одной теоремы Фукса. IV, 1, 1913, 63.
2. Акимов М. И., проф., К вопросу о разложении данной функции в ряд по полиномам Якоби. VIII, 1934, 224—226. Резюме на фр. яз.
3. Акимов М. И., О первом доказательстве основной теоремы алгебры Гаусса и одном доказательстве Коши. II, 1, 1907, 69—71.
4. Акимов М. И., О предельных случаях ρ функции Римана. I, 2, 1908, 87—91.
5. Акимов М. И., О функциях Bessel'я многих переменных и их приложениях в механике. VII, 2, 1928, 27—105. Резюме на фр. яз., VII, 3, 1929, 1—67. Резюме на фр. яз.
6. Болдырев А. К., Одно из свойств касающихся окружностей. IV, 4, 1913, 294—295.
7. Долбня И. П., Заметка об остаточном члене ряда Тэйлора. I, 1, 1908, 85—86.
8. Долбня И. П., Об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. IV, 1, 1913, 1—3.
9. Долбня И. П., Об одном классе приводимых гиперэллиптических интегралов. I, 4, 1908, 277—278.
10. Долбня И. П., Об одном преобразовании эллиптических интегралов. I, 3, 1908, 169—170.
11. Долбня И. П., Об одном приложении теории исключения к теории абелевых интегралов. II, 4, 1909, 263—271.
12. Долбня И. П., Новое доказательство основной теоремы алгебры. I, 4, 1908, 275—276.
13. Долбня И. П., Теоремы, относящиеся до уравнения Монжа и Ампера. III, 3—4, 1911, 274—276.
14. Журавский А. М., О кубическом характере числа 1-р. VII, 2, 1928, 15—26. Резюме на англ. яз.
15. Журавский А. М., проф., Об интеграле Кронскера. VIII, 1934, 227—235. Резюме на нем. яз.
16. Казанский А., Об одном случае предельной теоремы исчисления вероятностей. VIII, 1934, 236—245. Резюме на фр. яз.
17. Крылов Н. М., Заметка об остаточном члене ряда Тэйлора. VI, 1, 1906, 4—5.
18. Крылов Н. М., К понятию об определенном интеграле и о доказательстве основной теоремы существования интеграла обыкновенных дифференциальных уравнений. IV, 2, 1913, 67—73.
19. Крылов Н. М., К теории тригонометрических рядов. IV, 1, 1913, 54—62.
20. Крылов Н. М., О вариационных методах Ritz'a и Boussinesq'a VI, 1, 1916, 7—10.
21. Крылов Н. М., О минимальной задаче в теории дифференциальных уравнений колебаний упругого неоднородного стержня. V, 4—5, 1915, 382—387.
22. Крылов Н. М., О некоторых неравенствах, устанавливаемых при изложении метода Schwartz-Poincaré — Стеклова и встречающихся также при решении многих минеральных задач. VI, 1, 1916, 10—14.
23. Крылов Н. М., О ряде Лапласа. IV, 1913, 47—53.

¹ Римские цифры вначале означают том; арабские до даты — выпуск, после даты — страницу. Римские после даты также означают страницу.

**И.П.ДОЛБНЯ – ГОРНЫЙ ИНЖЕНЕР,
ЗАВЕДУЮЩИЙ КАФЕДРОЙ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ,
ДИРЕКТОР ГОРНОГО ИНСТИТУТА
(к 150-летию со дня рождения)**

В 2003 г. исполнилось 150 лет со дня рождения видного ученого и талантливого педагога Горного института И.П.Долбни (1853-1912). В статье на основе архивных материалов, научной математической и мемуарной литературы приведены краткая биография и воспоминания о нем его современников, освещены основные направления его научных исследований.

The paper is devoted to the 150-anniversary of a well-known scientists and talented teacher of Mining institute I.P.Dolbnia. Basing on the archives, scientific mathematical literature and memories a brief biography of the scientist is given and recollections of his contemporaries are presented; the main aspects of his scientific investigations are elucidated.

В 2003 г. научная и педагогическая общественность Горного института отметила 150-летие со дня рождения видного ученого и замечательного преподавателя Ивана Петровича Долбни.

Во второй половине XIX в. преподавание фундаментальных дисциплин в Горном институте велось на таком высоком уровне, что появились талантливые ученые и преподаватели по этим дисциплинам из числа воспитанников Института.

Одним из таких преподавателей был И.П.Долбня, горный инженер 1875 г. выпуска, ученик заслуженного профессора Г.А.Тиме. И.П.Долбня родился 31 января 1853 года в г.Пинске в семье унтер-офицера, состоявшего на службе при шлюзе. Четырнадцать лет от роду он окончил курс пинской гимназии и затем несколько лет негласно исполнял за своего отца обязанности волостного писаря. В 1870 г. Иван Петрович, сдав вступительные экзамены на отлично, поступил в Горный институт и единственный среди студентов получил стипендию [1]. По окончании курса в Горном институте (1875) И.П.Долбня поступил на педагогические курсы при 2-й Петербургской военной гимназии. С 1877 по 1880 гг. служил преподавателем математики в Неклю-

довской военной гимназии (г.Оренбург) и затем (до 1897 г.) состоял в той же должности в Нижегородском кадетском корпусе графа Аракчеева, т.е. 20 лет И.П.Долбня преподавал математику в средних учебных заведениях. В 1896 г. Иван Петрович был приглашен в Горный институт, где прочитал две пробные лекции: «О замене переменной в кратных интегралах» (по назначению Института) и «О кривизне кривых в пространстве трех измерений» (по своему выбору), после чего был единогласно избран экстраординарным профессором кафедры высшей математики [8].

В 1897 г. И.П.Долбня после защиты диссертации на тему «Исследование по теории абелевых интегралов» занял должность заведующего кафедрой высшей математики.

В 1898 г. ученый назначен ординарным профессором Горного института. В 1903 г. И.П.Долбня принимает деятельное участие в трудах особого совещания, образованного для пересмотра оснований существующего устройства эмеритальной кассы* горных инженеров. В 1904 г., согласно прошению,

* В дореволюционной России эмеритальные кассы составлялись из обязательных отчислений из жалованья государственных служащих для специальных пенсий уволенным в отставку, пособий вдовам и сиротам.

был уволен от службы в Горном институте в связи со студенческими политическими выступлениями. Несмотря на то, что он не был инициатором подписи коллективного протеста против избиения и арестов во время студенческой демонстрации, считал своим долгом поддержать своих более молодых товарищей: профессоров В.И.Баумана, Н.Н.Яковлева, В.В.Никитина, М.А.Шателена.

В 1906 г. Иван Петрович Долбня снова занял в Горном институте должность ординарного профессора. В 1910 г. по решению Совета Горного института назначен исполняющим обязанности директора Горного института, а в 1911 г. утвержден в этой должности. На посту директора Горного института Иван Петрович Долбня оставался вплоть до своей смерти, последовавшей на 59-м году жизни – 2 февраля 1912 г.

Даже из этого краткого и сухого перечня видно, что Иван Петрович прошел тяжелый жизненный путь, большую часть своей жизни посвятив педагогической деятельности и преподаванию своего любимого предмета – математики. Достигнутым в жизни успехам И.П.Долбня был обязан лишь самому себе, своим выдающимся способностям, труду и энергии. И.П.Долбня был неординарным педагогом и блестящим лектором. Он много времени уделял качеству преподавания, этому учил и своих учеников. О И.П.Долбне как о профессоре математики вспоминал его ученик, геолог, академик П.И.Степанов: «Среди математиков, прежде всего, вспоминается оригинальная и выдающаяся фигура профессора И.П.Долбни, создавшего целую эпоху в преподавании математики в Горном институте... Энергичный мужчина, с высокой немного сутуловатой фигурой, с темными яркими пронизывающими глазами, с черной бородкой и подстриженными седоватыми волосами, он сразу обращал на себя внимание. Он обладал громким голосом с удивительной дикцией; его голос наполнял всю аудиторию и был слышен в коридорах при закрытых дверях. И.П.Долбня читал курс дифференциального и интегрального исчислений. Трудно себе представить более четко разработанный лаконичный математический язык,

чем язык И.П.Долбни. Он не считал нужным принимать во внимание подготовку и различную степень восприимчивости у студентов. Раз математически верно, раз студент не тупица – он должен понять лекцию. Это был его девиз. И действительно, И.П.Долбня поднял преподавание математики на высокий уровень. И.П.Долбня был увлекательным собеседником: его рассказы, отдельные фразы, афоризмы часто были блестящими, но он не выносил возражений, соперничества» [7, с.152-153].

Другой его ученик, горный инженер Н.М.Крылов (1904 г. выпуска), впоследствии преемник И.П.Долбни на посту заведующего кафедрой высшей математики, академик, оставил о И.П.Долбне много интересных воспоминаний. В частности, Н.М.Крылов писал: «Принято говорить, что Иван Петрович был выдающимся лектором. Кто хоть раз присутствовал на его лекции, не мог не согласиться с этим мнением. Секрет его успеха заключался в редкой добросовестности, с которой Иван Петрович относился к своим обязанностям – чтению лекций: "Перед доской некогда обдумывать, – неоднократно говорил он, – вся подготовительная работа должна быть проведена заранее" [2, с.12]. Эта подготовительная работа придавала лекциям отпечаток простоты и изящества, а его изложению ту ясность и определенность, которая хотя и трудно достижима, но всегда желательна в преподавании таких наук, как математика. Незадолго до смерти в личной беседе Иван Петрович сказал (и это были едва ли не последние слова, слышанные Н.М.Крыловым от своего учителя): «...могут отрицать у меня все, даже математический талант, но нельзя отрицать того, что в свое время я прилично читал лекции» [Там же].

Некоторые из высказываний И.П.Долбни актуальны и по сей день. Так, например, по поводу поступившего от слушателей предложения по сокращению курса, объемом и так доведенного до возможного минимума, Иван Петрович выразил свое возмущение: «Я вижу, что вы хотите сделать высшее образование доступным всем – прекрасная цель! Но какими же путями хотите вы ее

достигнуть? Не посредством улучшения методов преподавания, не посредством возвышения науки, но посредством умаления ее до понимания ленивого ума» [3].

Научные работы И.П.Долбни весьма многочисленны, их список включает 75 названий; большая часть (48) названий относится к высшей математике, остальные – к элементарной [4].

Важнейшие из работ И.П.Долбни относятся к теории эллиптических функций и псевдоэллиптических интегралов, к теории абелевых интегралов и к высшей алгебре буквенных уравнений [5]. В то время теория эллиптических интегралов широко изучалась и была популярной. Ею занимались русские математики Н.Н.Алексеев, С.В.Ковалевская, Ю.В.Сохоцкий, зарубежные математики Ф.Бессель, Ж.Серре, Ш.Эрмит и др. [6]. Еще в 1891 г. И.П.Долбня привел простые приемы для выражения эллиптических интегралов через функции Вейерштрасса. С 1896 г. И.П.Долбня продолжил исследование П.Л.Чебышева относительно выражения в конечном виде некоторых абелевых интегралов. Он рассматривает те из них, относительно которых уже показал возможность их приведения к эллиптическим. Начиная с 1903 г., И.П.Долбня решает в ряде работ некоторые вопросы преобразования интегралов с конкретным полиномом под радикалом и показывает, что эти вопросы связаны с приведением абелевых и ультраэллиптических интегралов к эллиптическим.

В связи с широким применением эллиптических и θ -функций при решении прикладных задач особое значение приобретали научные исследования, направленные на сокращение необходимых вычислений. Многие из таких задач были решены в работах И.П.Долбни.

По инициативе Н.М.Крылова собрание научных трудов И.П.Долбни было издано после его смерти Советом Горного института отдельной книгой в Париже с предисловием французского математика Г.Дарбу [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев А.В.* Памяти И.П.Долбни (Речь, сказанная 8 мая 1912 г. на заседании Совета Горного института). Казань, 1912.
2. *Крылов Н.М.* И.П.Долбня. СПб, 1912.
3. *Крылов Н.М.* И.П.Долбня // Записки Горного института. СПб. 1912-1913. Т.4.
4. *Крылов Н.М.* Список работ профессора И.П.Долбни в хронологическом порядке их появления / Н.М.Крылов, М.И.Акимов // Записки Горного института. СПб, 1912-1913. Т.4.
5. *Мордухай-Болтовской В.Д.* Очерк научной деятельности И.П.Долбни // Математический сборник. М., 1912. Т.28. Вып.4.
6. *Налбандян М.Б.* О некоторых проблемах интегрирования иррациональных интегралов в работах русских математиков второй половины XIX века // История и методология естественных наук. Математика. М., 1966. Вып.5.
7. Памяти академика П.И.Степанова. М., 1952.
8. ЦГИА. СПб. Ф.963, оп.1, д. 6381, л.157.
9. *Dolbnia J.* Oeuvres Mathématiques de Jean Dolbnia. Paris, 1913.

ГОРНЫЕ ИНЖЕНЕРЫ – ВИДНЫЕ МАТЕМАТИКИ РОССИИ КОНЦА XIX – НАЧАЛА XX вв.

Краткий обзор педагогической и научной деятельности выпускников Горного института: Г.А.Тиме, И.П.Долбни и Н.М.Крылова, выдающихся математиков, возглавлявших кафедру высшей математики Института в конце XIX – начале XX вв.

Pedagogical and scientific activity of three famous graduates of Mining Institute: G.A.Time, I.P.Dolbnya, N.M.Krilyff that achieved great results in mathematics and its applications and headed mathematical department of the institute in the end of XIX – beginning of XX is briefly observed.

Начиная с середины XIX в. Горный институт отличается от других высших учебных заведений высоким уровнем преподавания математики, который, в первую очередь, был достигнут благодаря предшествующей деятельности в нем таких видных математиков, как ученик Л.Эйлера академик А.М.Вильбрехт (1785-1820), член-корреспондент Российской академии наук В.М.Висковатов (1808-1811), экстраординарный профессор Петербургского университета В.А.Анкудович (1823-1836). Огромная заслуга в развитии курса высшей математики в Горном институте и основ теоретической подготовки его воспитанников принадлежала академикам В.Я.Буняковскому и О.И.Сомову, которые вместе с П.Л.Чебышевым и М.В.Остроградским положили начало славной плеяде российских математиков.

Благодаря Осипу Ивановичу Сомову преподавание высшей математики и аналитической механики в Горном институте было поставлено на такой высокий уровень, что позволило подготовить преподавателей по этой дисциплине из числа воспитанников Института.

Горный инженер Георгий Августович Тиме открывает замечательную страницу в истории Горного института. Г.А.Тиме примет заведование кафедрой высшей математики от своего учителя О.И.Сомова в 1865 г.

(в связи с избранием последнего в Академию наук) и впоследствии передаст руководство кафедрой в 1897 году своему ученику, горному инженеру Ивану Петровичу Долбне. После смерти И.П.Долбни в 1912 г. кафедрой возглавит ученик И.П.Долбни, горный инженер, будущий академик Николай Митрофанович Крылов.

Г.А.Тиме, окончив в 1853 г. Горный институт, был командирован по округам Уральских заводов и на Алтай для «практического обозрения механических устройств и горных разработок», а затем по Высочайшему повелению – за границу, в Германию и Бельгию, для изучения горной механики и маркшейдерского дела [6]. Во время своих заграничных поездок он изучал во Фрайберге у Вейбаха и Вейнер прикладную механику, а также познакомился с выдающимся немецким математиком Б.Риманом, в то время приват-доцентом Геттингенского университета, стал его учеником, одним из первых в России усвоил его теорию функций комплексного переменного, а по приезде в Россию активно пропагандировал новую теорию. Публичные лекции, прочитанные Г.А.Тиме в помещении Морского кадетского корпуса, по теории Римана и ее приложениям к эллиптическим и абелевым трансцендентным функциям посещали П.Л.Чебышев, О.И.Сомов и В.Я.Буняковский, давшие им высокую оценку.

С 1855 г. Г.А.Тиме поступил на службу в Горный институт, где его педагогическая и научная деятельность продолжалась 55 лет (1855-1910), он обучил около 1800 специалистов, читая лекции по высшей математике, аналитической и теоретической механике, начертательной геометрии и маркшейдерскому делу [3]. Высокую оценку О.И.Сомова получил выполненный Г.А.Тиме перевод книги итальянского математика Э.Бетти по теории эллиптических функций, который, по признанию Горного ученого комитета, мог служить пособием для его воспитанников при изучении курса высшей математики. Ученый также принимал активное участие в издании первого в России математического журнала «Вестник математических наук» (Вильно, 1862).

Стараниями Г.А.Тиме была значительно пополнена и расширена библиотека Горного института, являющаяся до сих пор одной из лучших в России. Г.А.Тиме был составлен и издан в 1903 г. в виде изящной книжки небольшого формата курс аналитической механики, который поражал точностью и математической лаконичностью языка, а также стройностью содержания. Изучение этого курса доставляло большое удовольствие [5]. Помимо аналитической механики им был составлен курс по маркшейдерскому искусству и начертательной геометрии; написаны многочисленные работы по различным разделам маркшейдерского дела.

В своей научной деятельности Г.А.Тиме совмещал занятия как теоретическими, так и прикладными вопросами. В частности, наша современная горно-геометрическая служба обязана Г.А.Тиме разработками вопроса о применении триангуляции как основы горно-геометрических съемок, точного метода ориентирования съемок относительно астрономического меридиана и метода его определения и др. [7]. В 1902 г. Советом Горного института было решено учредить премию имени Г.А.Тиме за лучшие работы по математике и маркшейдерскому искусству. Примечательно, что в 1904 г. премию имени заслуженного профессора Г.А.Тиме за сочинение о гео-

метрических приложениях псевдоэллиптических интегралов получил Н.М.Крылов.

Иван Петрович Долбня окончил Горный институт в 1875 г. и затем преподавал математику в средних учебных заведениях в течение 20 лет. Научные интересы Г.А.Тиме и И.П.Долбни были связаны с актуальной для того времени теорией эллиптических функций, псевдоэллиптических и абелевых интегралов. Научные работы И.П.Долбни по этим разделам математики появляются с 1888 г. в русских и французских журналах. После смерти И.П.Долбни собрание его сочинений было издано Советом Горного института по инициативе Н.М.Крылова отдельной книгой в 1913 г. в Париже с предисловием известного французского математика Г.Дарбу, по мнению которого в работах И.П.Долбни элегантно излагаются наиболее тонкие и сложные вопросы математического анализа [9]. В 1896 г. И.П.Долбня был приглашен в Горный институт, где прочитал две пробные лекции. 15 декабря 1896 г. он защитил в Горном институте диссертацию на тему «Исследования по теории абелевых интегралов», а 17 декабря 1896 г. согласно проведенной баллотировке горный инженер и статский советник И.П.Долбня избран единогласно экстраординарным профессором по кафедре высшей математики [8].

И.П.Долбня был талантливым ученым и выдающимся педагогом. Блестящий лектор, он необыкновенно добросовестно относился к своим обязанностям, тщательно готовился к каждой лекции и прививал своим слушателям вкус к строгости и ясности изложения такой сложной науки, как математика. Его курс интегрального и дифференциального исчислений, прочитанный студентам Горного института в 1902-1903 гг., неоднократно литографировался и имеется в Главной библиотеке Горного института.

Выходец из простой солдатской семьи, И.П.Долбня всем своим успехам в науке был обязан лишь самому себе, своему уму и таланту. Последние два года жизни он являлся директором Горного института (1910-1912).

Работы по преобразованию эллиптических функций, а также исследования по

приведению гиперэллиптических функций и абелевых интегралов I и II родов к эллиптическим с помощью функций Вейерштрасса получили высокую оценку его современников. Особо отмечалось большое количество разобранных примеров, каждый из которых в отдельности представляет ценный научный факт. Часть работ посвящена алгебраическим вопросам: о критерии Галуа разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, форме корней разрешимого алгебраического уравнения простой степени и др. [4].

Неудивительно, что такая яркая личность, как И.П.Долбня воспитал достойного преемника по заведованию кафедрой – Николая Митрофановича Крылова.

Н.М.Крылов (1879-1955) окончил Горный институт в 1904 г. и по ходатайству И.П.Долбни был оставлен на кафедре высшей математики. С 1906 по 1910 гг. он продолжил образование во Франции и Италии, где слушал лекции выдающихся математиков своего времени: А.-Ж.Пуанкаре, Э.Пикара, А.-Л.Лебега, Ж.-С.Адамара, Г.Дарбу, Л.Бианки и У.Дини. К преподаванию в Горном институте он вновь приступил в 1910 г. Научные исследования Н.М.Крылова в этот период охватывают широкий круг вопросов математического анализа: теория интерполяции и теория замкнутости, формулы механических квадратур, разложение решений дифференциальных уравнений с частными производными по фундаментальным функциям и построение их приближенных решений вариационными методами. Н.М.Крылов построил метод решения вариационных задач и приводящихся к ним дифференциальных уравнений, частными случаями которого оказались известные методы Ритца, Галёркина и др. В 1911 г. Н.М.Крылов защитил в Горном институте диссертацию на степень адъюнкта на тему «О разложениях в ряды по фундаментальным функциям, встречаемых при интегрировании одного дифференциального уравнения с частными производными 4-го порядка, и о разложениях по полиномам Якоби». Вопросам общего анализа

посвящен ряд работ Н.М.Крылова, относящихся к построению и оценке остаточных членов рядов и интерполяционных формул, сходимости формул механических квадратур. Всего за годы работы в Горном институте (1912-1917) опубликованы 22 работы Н.М.Крылова [2].

Впоследствии Н.М.Крылов недолго работал профессором Крымского университета, а затем жил в Киеве и в Москве. В Киеве он возглавлял кафедру математической физики при Институте строительной механики АН УССР. В 1922 г. Н.М.Крылов был избран действительным членом АН УССР, а в 1929 г. – академиком АН СССР. До 1930 г. он много работал за границей, пропагандируя результаты своих научных исследований. С начала 30-х гг. основной областью его научных исследований становится изучение и развитие теории нелинейных колебаний. Результаты этих исследований подтвердили и упрочили мировую славу ученого. Его справедливо считают основоположником новой области математической физики – нелинейной механики [1]. Н.М.Крылов был членом многих зарубежных математических обществ (Американского, Неаполитанского, Французского) и различных академий наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. Николай Митрофанович Крылов (Краткий очерк жизни и научной деятельности) // Крылов Н.М. Избранные труды. Киев, 1961.
2. Венгер М.И. Научные исследования в области математики и механики в Ленинградском горном институте / М.И.Венгер, А.Ф.Захаревич // Ленинградский горный институт и Академия наук СССР: Сборник. Л., 1978.
3. Вермлов Н.П. Пятидесятилетний юбилей Н.А.Кулибина, Г.Д.Романовского и Г.А.Тиме // Горный журнал. 1901. Т.2. № 6.
4. Мордухай-Болтовской В.Д. Очерк научной деятельности И.П.Долбни // Математический сборник. М., 1912. Т.28. Вып.4.
5. Памяти академика П.И.Степанова / Под ред. И.И.Горского. М., 1952.
6. РГИА. М. Ф.44, оп.1, д.969, л.145-152.
7. Рыжов П.А. Из истории развития горно-геометрических (маркшейдерских) работ. М., 1950.
8. ЦГИА. СПб. Ф.963, оп.1, д. 6381, л.157.
9. Dolbnia J. Oeuvres Mathématiques de Jean Dolbnia. Paris, 1913.